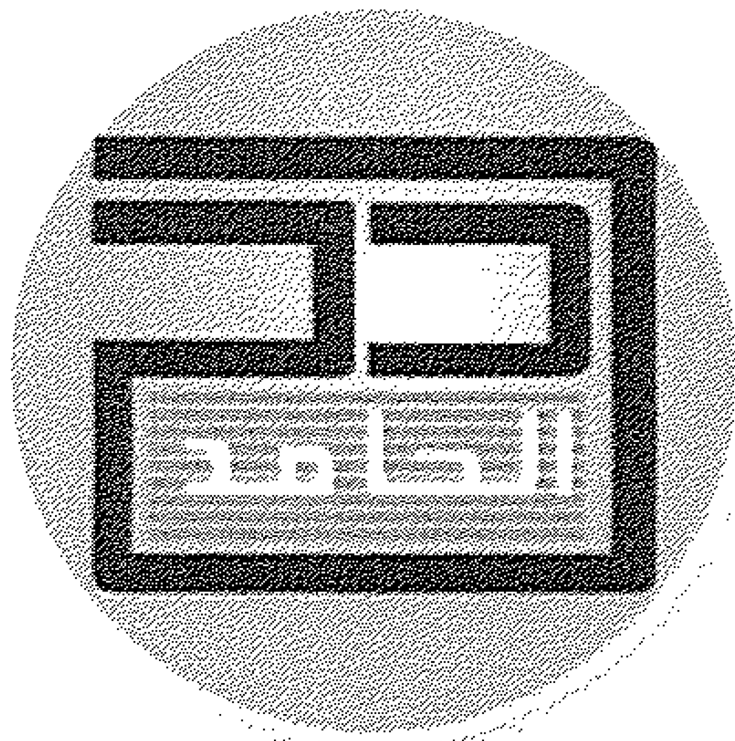

اختبار الفرضيات الاحصائية

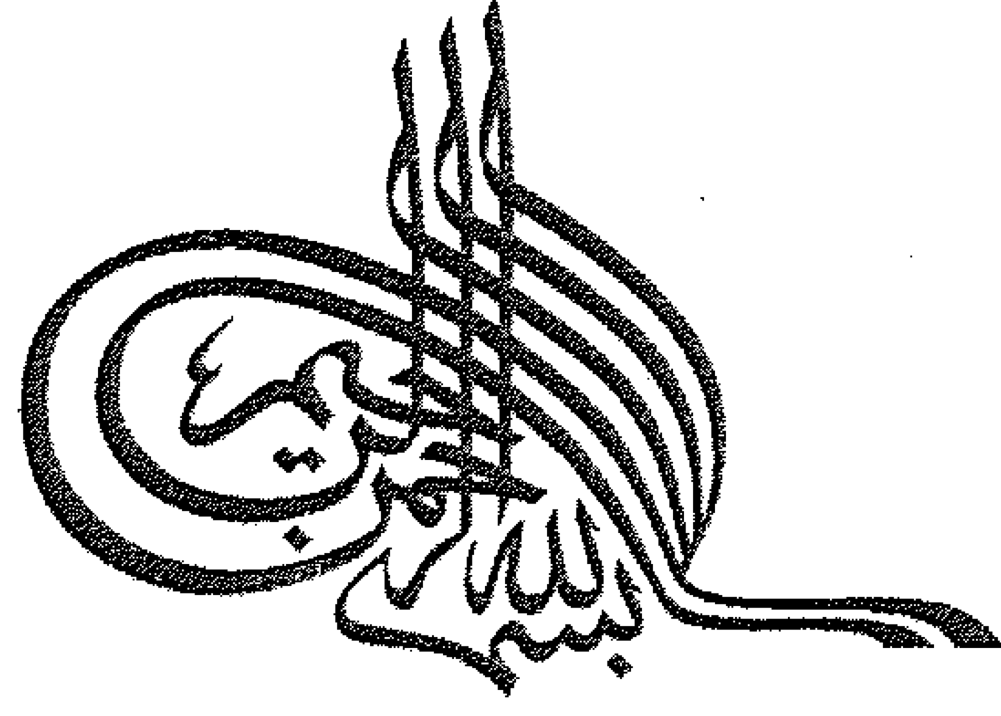
الدكتور ثائر فيصل شاهر






الحامد

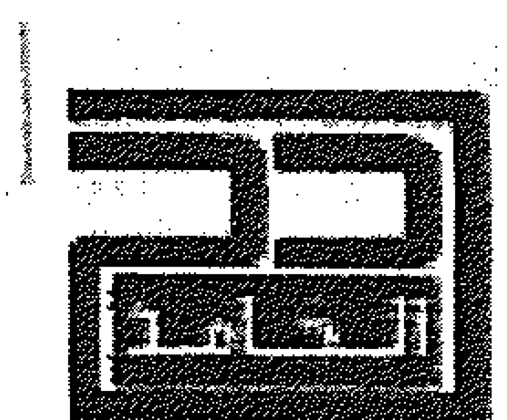

الحامد
دار الحامد للنشر والتوزيع
www.daralhamed.net



اختبار الفرضيات الإحصائية

اختبار
الفرضيات الإحصائية

الدكتور
ثائر فيصل الشاهر
جامعة عمان الأهلية



رقم التصنيف : 519.56

المؤلف ومن هو في حكمه : ثائر فيصل شاهر

عنوان الكتاب : اختبار الفرضيات الإحصائية

رقم الإيداع : 2013/1/289

الواصفات : /الاحصاء//التحليل الاحصائي/

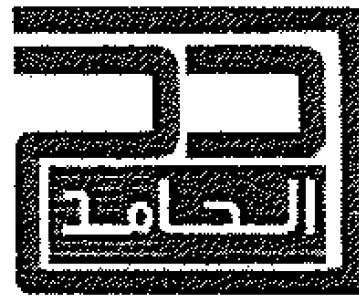
بيانات الناشر : عمان – دار ومكتبة الحامد للنشر والتوزيع

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى.

(ردمك) ISBN 978-9957-32-744-6

تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية.

الطبعة الأولى 2013-1434هـ



دار الحامد للنشر والتوزيع

الأردن - عمان - شفا بدران - شارع العرب مقابل جامعة العلوم التطبيقية

هاتف: 5231081 6 962+ فاكس: 5235594 6 962+

ص.ب. (366) الرمز البريدي: (11941) عمان – الأردن

www.daralhamed.net

E-mail : daralhamed@yahoo.com

المحتويات

الفصل الثالث

الفصل السابع

الفصل الثامن

الفصل التاسع

الفصل العاشر

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على رسوله الكريم، بتوفيق الله ورحمته تم إنجاز هذا الكتاب الموسوم بـ"**اختبار الفرضيات الإحصائية**". وحقيقة الأمر أن فكرة تأليف هذا الكتاب راودتني منذ أول سنة بدأت فيها بتدريس مادة الإحصاء منذ أكثر من عشرين سنة. لما لموضوع هذا الكتاب من أهمية للباحث العربي والطالب الأكاديمي في مراحل الدراسة الأولية والعليا إذ أن أغلب البحوث والدراسات تعتمد على فرضية بحث لا بد من اختبارها لدعم فكرة وموضوع البحث ونعتقد أن هذا الكتاب سيكون إسهاماً متواضعاً للمكتبة العربية والمعرفية العلمية الإنسانية، وقد حاولت أن أطرح الموضوع بطريقة بسيطة مدعمة بالأمثلة المحلولة زيادةً في فهم الموضوع كما احتوى الكتاب على أسئلة لكل فصل يمكن أن تكون مؤشراً إضافياً لعملية الفهم والاستيعاب.

لقد ضم الكتاب عشرة فصول حيث أن الفصل الأول خصص لطرح موضوع العينة وطرق سحبها وأنواع العينات المهمة والأكثر شيوعاً في البحث العلمي.

أما الفصل الثاني فقد خصص لشرح مفهوم التوزيع الإحصائي للمتغير العشوائي الكمي بنوعيه المتقطع أو المنفصل حيث تم التطرق إلى توزيع ثنائي الحدين وتوزيع بواسون وتوزيعات المتغير العشوائي المستمر مثل التوزيع الطبيعي وتوزيع مربع كاي وتوزيع (t) وتوزيع (F) إضافة لتوزيع المعاينة كتوزيع المعاينة للوسط الحسابي والنسب. واحتوى الفصل الثالث على مفاهيم أساسية مهمة في اختبار الفرضيات كفرضية العدم والفرضية البديلة ومستوى المعنوية أو الدلالة وقوة الاختبار والخطأ المعياري للمقدر ودرجات الحرية والمنطقة الحرجة والقيم الحرجة للتوزيع الإحصائي.

والفصل الرابع خصص لاختبارات تتعلق بالوسط الحسابي، والفصل الخامس خصص لاختبارات تتعلق بأكثر من متوسطين. أما الفصل السادس فقد كان لاختبارات تتعلق بالنسب، والسابع خصص لاختبارات تتعلق بالتباين والانحراف المعياري، والفصل الثامن خصص لاختبارات تتعلق بالارتباط، والتاسع خصص لاختبارات الاستقلالية وحسن المطابقة.

وأخيراً فقد خصص الفصل العاشر والأخير لبعض الاختبارات اللامعلمية والتي لا تتطلب معرفة التوزيع الإحصائي للمتغير.

ولقد حرصنا أن نرفد جانباً من كل فصل إلى فقرة سميت بأمثلة محلولة تسبق أسئلة الفصل لتكون هناك فرصة للمستفيد أن يتمرن على الحل قبل حله لأسئلة الفصل.

وإننا نسعى من خلال هذا الجهد المتواضع إلى تسهيل الطريق أمام أبنائنا وزملائنا الباحثين للبحث والتطوير ومن الله التوفيق.

المؤلف

1 كانون ثاني 2013

الفصل الأول

العينة أنواعها وطرق سحبها

الفصل الأول

العينة أنواعها وطرق سحبها

1-1 مقدمة:

تستند معظم البحوث والدراسات العلمية على مبدأ دراسة مجموعة مؤشرات وقياسات مستخرجة من مشاهدات العينة ومحاولة تعميمها لتكون مؤشرات وقياسات المجتمع وهذا هو مفهوم الاستدلال الإحصائي حيث أن استخدام العينة في البحث العلمي بدلاً من المجتمع الإحصائي له مبررات كثيرة منها ما يتعلق باختصار الوقت والجهد والتكاليف الذي يحققها استخدام العينة بدلاً من دراسة المجتمع. كما أن بعض المجتمعات الإحصائية تكون غير محددة وغير مغلقة ولا يمكن الوصول لجميع مشاهداتها. وهنا أصبح استخدام أسلوب المعاينة ضرورة قصوى لإتمام الدراسة وجعل استخدام العينة أمراً ضرورياً وحتمياً، لذا لا بد لنا أن نؤكد على اختيار الأسلوب العلمي لاختيار المشاهدات لهذه العينة وتحديد نوعها دون غيرها سوف يمكننا من اختيار عينة تحمل كل سمات المجتمع وخواصه أي أننا اخترنا عينة تكون بمثابة مجتمعاً مصغراً عن المجتمع الأصلي. وبذلك فإن التعميم لنتائج العينة يصبح صحيحاً وممكناً.

2-1 أنواع العينة:

للوصول إلى الدقة المطلوبة في النتائج ينبغي اختيار العينة المناسبة لخصائص وطبيعة مجتمع الدراسة بحيث تحتوي على معلومات كافية عن هذا المجتمع، ولكي يكون من الممكن تعميم نتائجها على المجتمع.

وتنقسم العينات إلى نوعين رئيسين هما:

أولاً: العينات الاحتمالية أو العشوائية

وهي العينات التي لا يكون للباحث أي دخل في اختيار مفرداتها، أي العينات التي يتحقق فيها مبدأ تساوي الفرصة لظهور أي مفردة من مفردات المجتمع ضمن مفردات العينة. ومن أهم أنواع العينات الاحتمالية (العشوائية):

1.2.1) العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample:

إذا اتصف المجتمع الإحصائي بأنه مجتمع تام التجانس أي أن كل مشاهدة فيه لها خصائص وصفات لا تختلف عن المشاهدات الأخرى استناداً للدراسة أو البحث المطلوب أمكن سحب عينة عشوائية بسيطة من هذا المجتمع لأن كل مفردة أو مشاهدة في المجتمع سيكون لها نفس الفرصة بالظهور في العينة، فعندما نريد اختيار عينة من الطلبة المدخنين في الجامعة فإن كل طلبة الجامعة المدخنين هم مشاهدات مجتمع البحث، وأصبح هنا المجتمع تام التجانس من حيث الظاهرة المدروسة (بغض النظر عن جميع المتغيرات الأخرى كالجنس والعمر وغيرها من المتغيرات) ولهذا النوع من العينات بعض الخصائص منها:

1) عدد العينات ممكن الاختيار بحجم (n) من مجتمع حجمه (N) هو:

$$C_n^N = \frac{N!}{(N-n)!n!} \qquad \text{.........} \ (1\text{-}1)$$

مثال (1.1):

في إحدى الكليات ستة أقسام علمية أردنا اختيار قسمين لإجراء دراسة ما هي عدد العينات التي يمكن اختبارها بواقع قسمين فقط.

الحل:

نفرض أننا رمزنا لأقسام هذه الكلية بالرموز:

(F , E , D , C , B , A)

ستكون العينات ممكنة الاختيار هي:

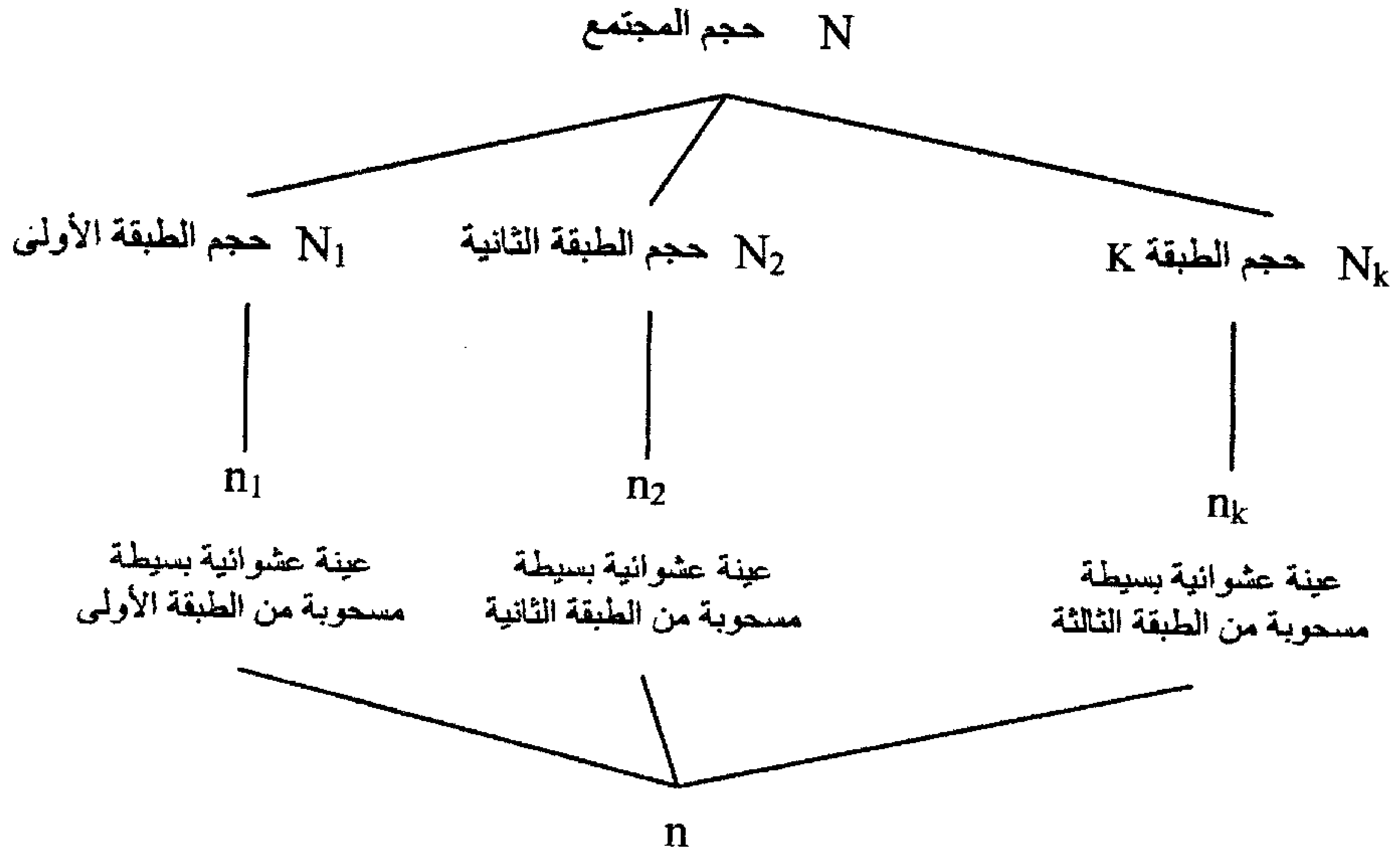
$$C_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = 15$$

ويمكن توضيح هذه العينات الخمسة عشر كما يلي:

العينة	الأقسام	العينة	الأقسام
1	AB	9	BF
2	AC	10	CD
3	AD	11	CE
4	AE	12	CF
5	AF	13	DE
6	BC	14	DF
7	BD	15	EF
8	BE		

2.2.1) العينة الطبقية العشوائية Stratified Random Smple:

المجتمع في هذه الحالة مقسم إلى مجموعات كل مجموعة تسمى طبقة وكل طبقة تامة التجانس في مفرداتها أو مشاهداتها، لذا يمكن سحب عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة ليكون مجموع العينات المسحوبة من الطبقات هو العينة الطبقية العشوائية المطلوبة، لاحظ الشكل (1-1):



شكل رقم (1-1)

العينة الطبقية العشوائية

لاحظ أن:

$$N = N_1 + N_2 + \dots\dots\dots + N_k \qquad \dots\dots\dots (1\text{-}2)$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots\dots\dots + n_k \qquad \dots\dots\dots (1\text{-}3)$$

إن حجم العينة العشوائية المسحوب من الطبقة (i) يستخرج وفق العلاقة:

$$n_i = N_i \times \frac{n}{N} \qquad \dots\dots\dots (1\text{-}4)$$

حيث أن:

$i = 1, 2, 3, \dots\dots, k$

N = حجم المجتمع

N_i = حجم الطبقة

n = حجم العينة

ni = إسهام الطبقة i في العينة

مثال (2.1):

في أحد المعامل الإنتاجية (50) مهندس و(20) موظف إداري و(100) عامل ماهر و(30) عامل غير ماهر، وأردنا سحب عينة طبقية عشوائية بحجم (20) من المنتسبين للمعمل لدراسة واقع الرضا الوظيفي لديهم.

وضح كيفية سحب هذه العينة.

الحل:

حجم المجتمع هو:

$$N = 50 + 20 + 100 + 30 = 200$$

حجم العينة المسحوبة من الطبقة الأولى (المهندسين):

$$n_1 = 50 \times \left(\frac{20}{200}\right) = 5$$

حجم العينة المسحوبة من الطبقة الثانية (الموظفين الإداريين):

$$n_2 = 20 \times \left(\frac{20}{200}\right) = 2$$

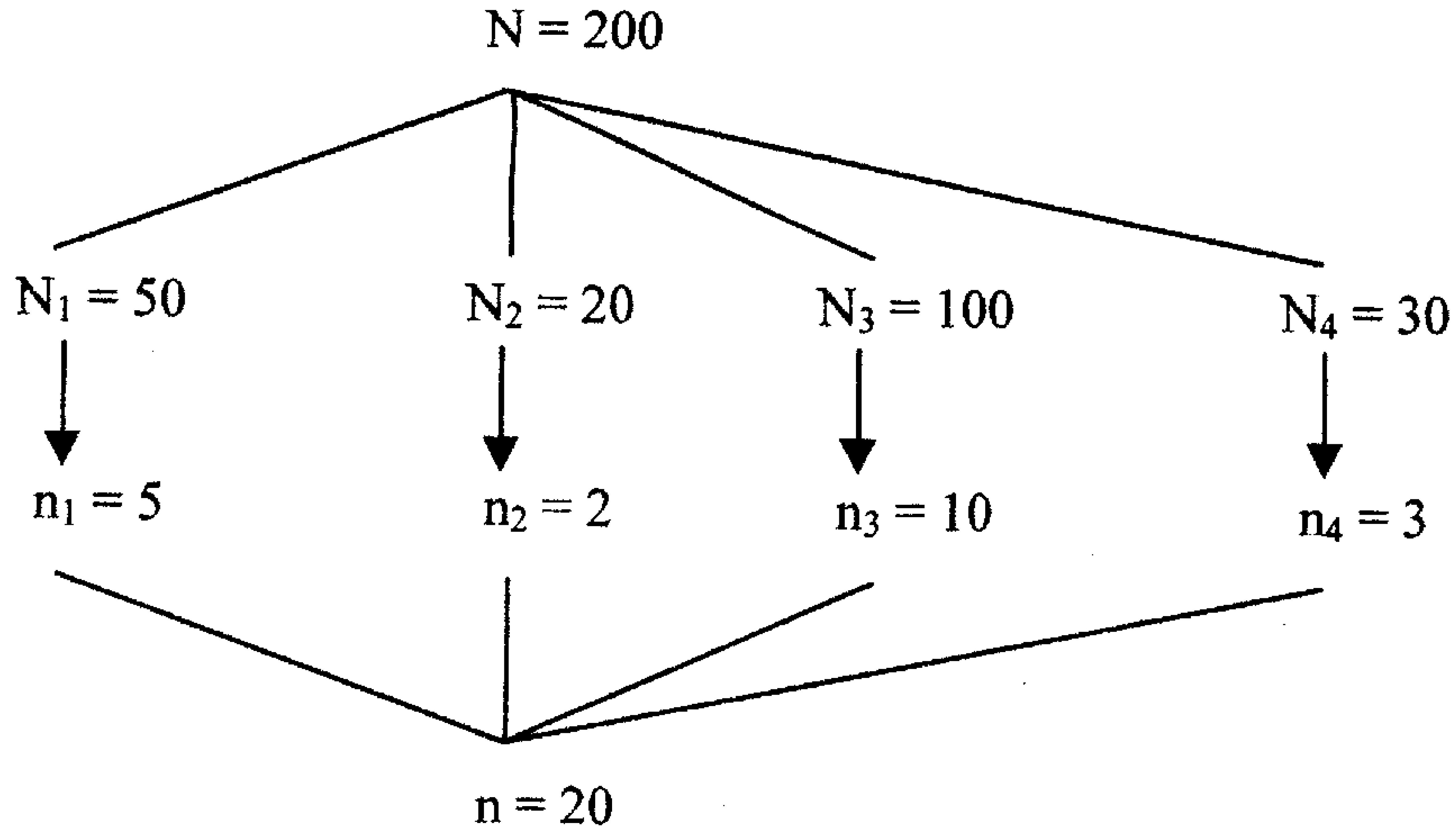
حجم العينة المسحوبة من الطبقة الثالثة (العمال الماهرين):

$$n_3 = 100 \times \left(\frac{20}{200}\right) = 10$$

حجم العينة المسحوبة من الطبقة الرابعة (العمال غير الماهرين):

$$n_4 = 30 \times \left(\frac{20}{200}\right) = 3$$

ويمكن توضيح هذه العينة بالشكل التالي:



لاحظ أنه تم تحقيق التناسب الطبقي المطلوب في العينة حيث أن الطبقة الكبيرة (العمال الماهرين) كان لها أكبر إسهام والطبقة الصغيرة (الموظفين الإداريين) كان لها أقل إسهام.

3.2.1) العينة المنتظمة Systematic Sampling:

إذا كان مجتمع الدراسة يتصف بأنه يمكن ترتيبه بشكل تصاعدي أو تنازلي تكون العينة المناسبة للسحب هي العينة المنتظمة، ومثال على ذلك إذا أردنا سحب عينة من دفتر الشيكات فإن الشيكات مرتبة ترتيباً تصاعدياً يمكن الاعتماد عليه في سحب عينة منتظمة.

لذا فإن هذه العينة تتطلب ترقيم مشاهدات المجتمع ثم اختبار مشاهدة من أول K من المشاهدات، وإذا أردنا اختيار المشاهدة الثانية فإننا نفتقر إلى:

$$K + \frac{N}{n} \qquad \text{.........} \ (1\text{-}5)$$

أي أن مقدار القفزة أو الفترة بين المشاهدة الأولى والمشاهدة الثانية هو $\frac{N}{n}$ وهكذا نضيف $\frac{N}{n}$ للمشاهدة الثانية لنجد المشاهدة الثالثة وهكذا لبقية المشاهدات المختارة.

مثال (3.1):

لدراسة تتعلق بواقع الإنفاق العائلي أردنا سحب عينة بحجم عشرة دور في حي سكني رقمت دوره من 1 إلى 200 ما هي المشاهدات (الدور) التي سيتم اختيارها لهذه العينة.

الحل:

عدد المجموعات التي يمكن تقسيم المجتمع لها هي:

$$\frac{N}{n} = \frac{200}{10} = 20$$

عدد المجاميع هي عشرون مجموعة وطول الفترة هو أيضاً 20

من المجموعة الأولى التي تحتوي على الدور المرقمة من 1 إلى 20 نختار أحد الدور عشوائياً وليكن الدار رقم 2 ومن المجموع الثانية نختار الدار رقم 20 + 2 = 22 وهكذا من المجموعة الثالثة نختار الدار رقم 42 = 20 + 22 ونستمر لبقية المجموعات بإضافة 20 للدار الذي اخترناه من المجموعة السابقة فيكون لدينا عينة عشوائية منتظمة مفرداتها:

2، 22، 42، 62، 82، 102، 122، 142، 162، 182.

4.2.1) العينة متعددة المراحل Multi - Stage Sample:

تسحب هذه العينة عندما يكون المجتمع كبير جداً إذ يتم تقسيمه إلى وحدات تسمى بالوحدات الأولية يتم سحب عينة عشوائية منها. كمرحلة أولى يتم تقسيم المجتمع إلى وحدات تسمى وحدات أولية تسحب منها عينة للمرحلة الأولى ثم تقسم مفردات العينة المختارة من المرحلة الأولى إلى وحدات أصغر تسمى بالوحدات الثانوية وتؤخذ منها عينة للمرحلة الثانية وهكذا نستمر بالتقسيم والاختيار حتى نصل إلى العينة الأخيرة التي تحتوي على مشاهدات تستنبط منها المعلومات المطلوبة.

ومثال على ذلك لو أردنا دراسة واقع زراعة الزيتون في الأردن تحدد المحافظات التي تزرع الزيتون كوحدات أولية نسحب منها عينة من المحافظات كمرحلة أولى ثم تقسم كل محافظة إلى عدد من الأقضية ونسحب من هذه الأقضية عينة كمرحلة ثانية.

ثم يقسم كل قضاء إلى عدد من النواحي يسحب منه عينة كمرحلة ثالثة ثم نقوم بسحب عدد من العوائل التي تهتم بزراعة الزيتون من النواحي المختارة كمرحلة رابعة لتكون الدراسة منصبة على هذه العوائل كمشاهدات للعينة متعددة المراحل التي اخترناها.

أمثلة محلولة

مثال (4.1):

قررت إحدى المؤسسات منح اثنين من موظفيها جائزة تميز وكان عدد المؤهلين لهذه الجائزة ستة أشخاص.

1) ما نوع السحب في هذه الحالة.

2) كم عينة (اختيار) يمكن اختيارها في هذه الحالة.

الحل:

1. العينة المسحوبة هي عينة عشوائية بسيطة لأن المجتمع تام التجانس ولا فرق بين الموظفين الستة من حيث تأهلهم للجائزة.

2. يمكن حساب عدد العينات العشوائية التي يمكن اختيارها باستخدام الصيغة (1.1) أي:

$$C_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!\ 2!} = 15$$

ويمكن توضيح العينات الخمسة عشر (إذا افترضنا أن الموظفين الستة هم A , B , C , D , E , F):

العينة	الموظفين	العينة	الموظفين	العينة	الموظفين
1	AB	6	BC	11	CE
2	AC	7	BD	12	CF
3	AD	8	BE	13	DE
4	AE	9	BF	14	DF
5	AF	10	CD	15	EF

مثال (5.1):

في إحدى المعامل (40) عامل ماهر و(60) عامل غير ماهر نريد سحب عينة بحجم (20) عامل.

1. ما نوع العينة المسحوبة.
2. كيف يتم سحبها.

الحل:

1. نوع العينة المسحوبة عينة طبقية عشوائية لأن المجتمع مقسم إلى طبقتين وكل طبقة هي تامة التجانس بالنسبة لمفرداتها.
2. وزن طبقة العمال الماهرين:

$$W_1 = \frac{40}{60+40} = 0.40$$

عدد العمال الماهرين في العينة المطلوبة هو:

$$n_1 = n \times W_1 = 20 \times 0.40 = 8$$

وزن طبقة العمال غير الماهرين:

$$W_2 = \frac{60}{60+40} = 0.60$$

عدد العمال غير الماهرين في العينة المطلوبة هو:

$$n_2 = n \, . \, W_2 = 20\,(0.60) = 12$$

مثال (6.1):

أريد سحب عينة بحجم خمسة شيكات من دفتر شيكات أحد العملاء في البنك لدراسة إنفاقه الفردي وكانت الشيكات مرقمة من 1 إلى 30.

1. ما نوع العينة الواجب سحبها.
2. كيف سيتم السحب.

الحل:

1. بما أن المفردات (الشيكات) مرتبة تصاعدياً ستكون العينة المختارة عينة منتظمة.

2. $$K = \frac{N}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

وعليه تكون مفردات العينة إذا اخترنا المفردة رقم (1) ستكون المفردة رقم (2) هي:

$1 + 6 = 7$

أما المفردة الثالثة فهي: $7 + 6 = 13$

والمفردة الرابعة: $13 + 6 = 19$

والمفردة الخامسة: $19 + 7 = 26$

أي أن الشيكات المختارة هي: (1 ، 7 ، 13 ، 19 ، 26).

مثال (7.1):

حدد نوع العينة للحالات التالية:

1. اختيار طلبة من الفصل للمشاركة في وضع البرنامج الامتحاني.

الجواب: عينة عشوائية بسيطة.

2. لدراسة واقع الإنفاق العائلي في مناطق مختلفة من محافظة عمان.

الجواب: عينة طبقية عشوائية حيث يتم اختبار عينة من عوائل مرتفعة الدخل وعينة من عوائل متوسطة الدخل وعينة من عوائل واطئة الدخل.

3. دراسة الإنفاق الصحي والمطلوب سحب عينة من (100) دار مرقمة من (1-100).

الجواب: عينة منتظمة.

4. سحب عينة لدراسة إمكانية تصدير محصول زراعي.

الجواب: عينة متعددة المراحل.

أسئلة الفصل الأول

س1 : عرف ما يلي وأعط مثال:

1) العينة.
2) المجتمع.
3) العينة العشوائية البسيطة.
4) العينة متعددة المراحل.
5) العينة المنتظمة.

س2: ما هي الأسباب الأساسية التي تدعوا لسحب عينة بدلاً من دراسة كل مجتمع الدراسة.

س3: ضع علامة (√) أمام الإجابة الصحيحة:

- لسحب عينة عشوائية بسيطة يجب أن يكون المجتمع:
  1. المجتمع غير متجانس.
  2. المجتمع تام التجانس.
  3. تجانس المجتمع محصور في طبقات أو مجموعات.

س4: تتميز العينة الطبقية العشوائية:

- أن المجتمع المسحوبة منه تام التجانس.
- أن المجتمع مقسم إلى مجموعات كل مجموعة متجانسة تماماً فيما بينها.
- أن المجتمع كبير جداً.

س5: إذا كان المجتمع كبير جداً وأردنا سحب عينة بحجم صغير فينبغي أن يكون نوع العينة:

- ❖ طبقية عشوائية.
- ❖ عشوائية بسيطة.
- ❖ عينة منتظمة.
- ❖ عينة متعددة المراحل.

س6: إن عملية سحب العينة يكون مفيداً في الدراسات:

- ❖ الخاصة بالإحصاء الوصفي.
- ❖ الخاصة بالمسوحات الشاملة للمجتمع.
- ❖ الخاصة بالإحصاء الاستدلالي والاستنتاجي.

الفصل الثاني

التوزيع الإحصائي للمتغير العشوائي المنفصل والمستمر

الفصل الثاني

التوزيع الإحصائي للمتغير العشوائي المنفصل والمستمر

2-1 التوزيع الإحصائي:

المقصود بالتوزيع الإحصائي للمتغير العشوائي X هو إيجاد الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم X مثلاً لو أنتجت ماكنة ثلاث وحدات، وعرفنا المتغير العشوائي X عدد الوحدات الصالحة فيهم فإن X يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$X = 0 , 1 , 2 , 3$

وفضاء العينة في هذه الحالة هو:

S = { معيب صالح صالح، صالح معيب صالح، صالح صالح معيب، معيب معيب معيب، صالح صالح صالح، معيب معيب صالح، معيب صالح معيب، صالح معيب معيب }

وأن التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة هو:

	X	f_i	P_i
{معيب معيب معيب}	0	1	$\frac{1}{8} = 0.125$
{معيب معيب صالح معيب صالح معيب صالح معيب معيب}	1	3	$\frac{3}{8} = 0.375$
صالح صالح معيب صالح معيب صالح معيب صالح صالح	2	3	$\frac{3}{8} = 0.375$
صالح صالح صالح	3	1	$\frac{1}{8} = 0.125$
			1
			مجموع الاحتمالات

لاحظ أن مجموع الاحتمالات المقابلة لكل قيم المتغير العشوائي X مساوية إلى 1 (الواحد الصحيح).

2-2 بعض التوزيعات القياسية للمتغير المنفصل:

Some Distributions for the Discreate Random Variable

المتغير العشوائي المنفصل هو المتغير الذي يمكن أن يعد ولا يحتوي على كسور في قيمه، ومن أمثلة ذلك أن نعرف X بأنه عدد الوحدات المعيبة في إنتاج عشرة وحدات، لذا يمكن أنه يأخذ X القيم التالية:

$$X = 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots , 10$$

ومن أهم التوزيعات القياسية التي تصف هذا المتغير:

1.2.2) توزيع ثنائي الحدين Binomial Distribution:

وهو من التوزيعات القياسية المعروفة للمتغير العشوائي المنفصل ويمكن التعرف على هذا التوزيع من خلال خصائصه التالية:

1. هو n هو تجارب برنولي التي تتصف بأنها تجربة متنافية (فشل، نجاح)، (ولد ، بنت)، (معيوب، صالح)...
2. التجارب فيما بينها مستقلة.
3. X يمثل عدد حالات النجاح وتكون قيمه محصورة بين الصفر الصحيح حتى n

$$X = 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots , n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}1)$$

4. P يمثل احتمال النجاح في تجربة واحدة، q يمثل احتمال الفشل في هذه التجربة وأن:

$$P + q = 1$$

5. دالة التوزيع القياسية هي:

$$P(X) = \begin{cases} C_x^n \quad P^x \quad q^{n-x} & X = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{other wise} \end{cases} \qquad \ldots\ldots (2\text{-}2)$$

6. القيمة المتوقعة لعدد حالات النجاح (متوسط حالات النجاح) هي:

$M = E(x) = n \cdot p$ .... (2-3)

7. التباين في عدد حالات النجاح

$\sigma_x^2 = n \cdot p \cdot q$ .... (2-4)

مثال (1.2):

تقدم أحد الأشخاص لإحدى الوظائف وكان عليه اجتياز اختباراً يحتوي على عشرة أسئلة ولكل سؤال إجابة صحيحة وإجابة خاطئة.

ما هو احتمال أن:

1. يحصل على خمسة إجابات صحيحة.
2. يحصل على الأقل على إجابة صحيحة واحدة.
3. ما هو العدد المتوقع للإجابات الصحيحة.
4. ما هو التباين في عدد الإجابات الصحيحة.

الحل:

$n = 10 \qquad P = \frac{1}{2} \qquad q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$P(x) = \begin{cases} C_x^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} & \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1

$$P(x=5) = C_5^{10} \quad \frac{1}{2}^{5} \quad \frac{1}{2}^{10-5}$$
$$= 0.24609375$$

(2

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(x=2) + \ldots\ldots + P(x=10)$$

Or

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$
$$= 1 - P(X = 0)$$
$$= C_0^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-0} = 0.999023$$

3) $E(x) = M_x = n \cdot p = 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5$

4) $\sigma_x^2 = n \cdot p \cdot q = 10\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2.5$

2.2.2) توزيع بواسون Poisson Distribution:

يسمى هذا التوزيع بتوزيع الحوادث النادرة لأن احتمال النجاح (P) يكون ضعيفاً وغير متوقعاً ($P < 0.10$) أما n التي تمثل عدد مرات تكرار التجربة فتكون كبيرة ($n > 30$) لذا يكون متوسط عدد حالات النجاح والذي يمثل معلمة هذا التوزيع هو:

$$\lambda = n \cdot p$$

أما معادلة التوزيع فهي:

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ldots\ldots \\ 0 & other\quad wise \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}5)$$

مع ملاحظة أن متوسط التوزيع (العدد المتوقع) لحالات النجاح وتباين التوزيع = λ أي أن:

$$M = E(x) = \lambda$$
$$\sigma^2 = \lambda$$

مثال (2.2):

إذا كان من بين كل (100) وحدة منتجة هناك واحدة فقط معيبة، ما هو احتمال أن في إنتاج (200) وحدة قادمة:

1. أن لا يكون في الإنتاج معيب.
2. أن يكون هناك منتج واحد فقط معيب.
3. أن يكون هناك منتج واحد على الأقل معيب.
4. متوسط عدد الوحدات المعيبة.
5. التباين في عدد الوحدات المعيبة.

الحل:

$n = 200 \qquad p = 0.01$

$\lambda = n \,.\, p = 200\,(0.01) = 2$

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2}2^{x}}{x!} & x = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

1) $P(x=0) = \dfrac{e^{-2}2^{0}}{0!} = 0.1353352$

2) $P(x=1) = \dfrac{e^{-2}2^{1}}{2!} = 0.1353352$

3) $P(x\geq1) = 1 - P(x<1)$
$= 1 - P(x=0)$
$= 1 - 0.1353352$
$= 0.8646647$

4) $\lambda = E(x) = 2$

5) $c^{2} = \lambda = 2$

2-3 بعض التوزيعات الإحصائية للمتغير العشوائي المستمر:

Some Distribution for the Continuons Random Variable

المقصود بالمتغير المستمر هو المتغير الكمي الذي يقاس ولا يمكن عده، لذا فإن قيمه يمكن أن تحتوي على كسور كمتغير الطول والوزن والأجور ونسب الفائدة وحجم الأرباح.

ومن أهم التوزيعات للمتغير المستمر:

1.3.2) التوزيع الطبيعي Normal Distribution:

وهو أهم التوزيعات الإحصائية وأكثرها شيوعاً، كما أنه مهما كان التوزيع الإحصائي لمجتمع الدراسة فإن حجم العينة إذا كبر فإن التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعي.

ولهذا التوزيع معلمتين هما المتوسط الحسابي للمجتمع (M) والتباين (σ^2)
ودالة هذا التوزيع هي:

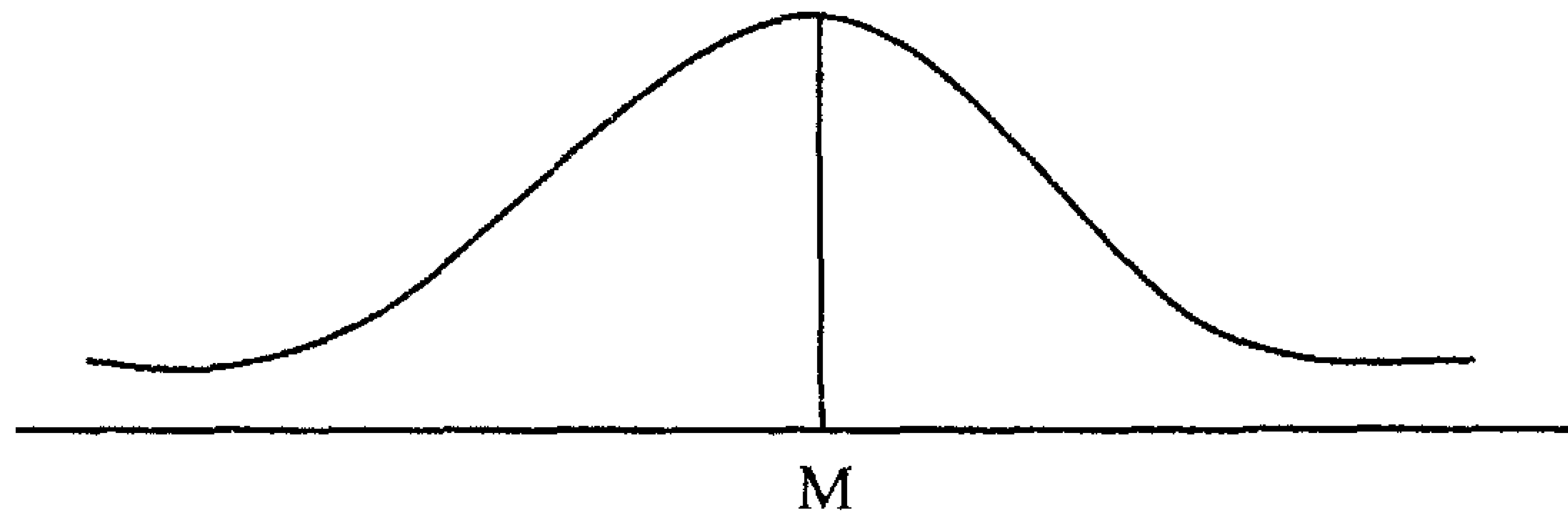
$$f_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-M}{\sigma}\right)^2} & -\infty < X < \infty \\ & -\infty < M < \infty \\ & \sigma^2 > 0 \\ 0 & \text{other wise} \end{cases} \quad \text{.........(2-6)}$$

وأهم خصائص هذا التوزيع:

1) هو توزيع متماثل الشكل حول محور الوسط الحسابي M بحيث أن المساحة إلى يسار محور التماثل تساوي وتطابق المساحة إلى يمينه، لاحظ الشكل:

الشكل (1_2)

يبين تماثل التوزيع

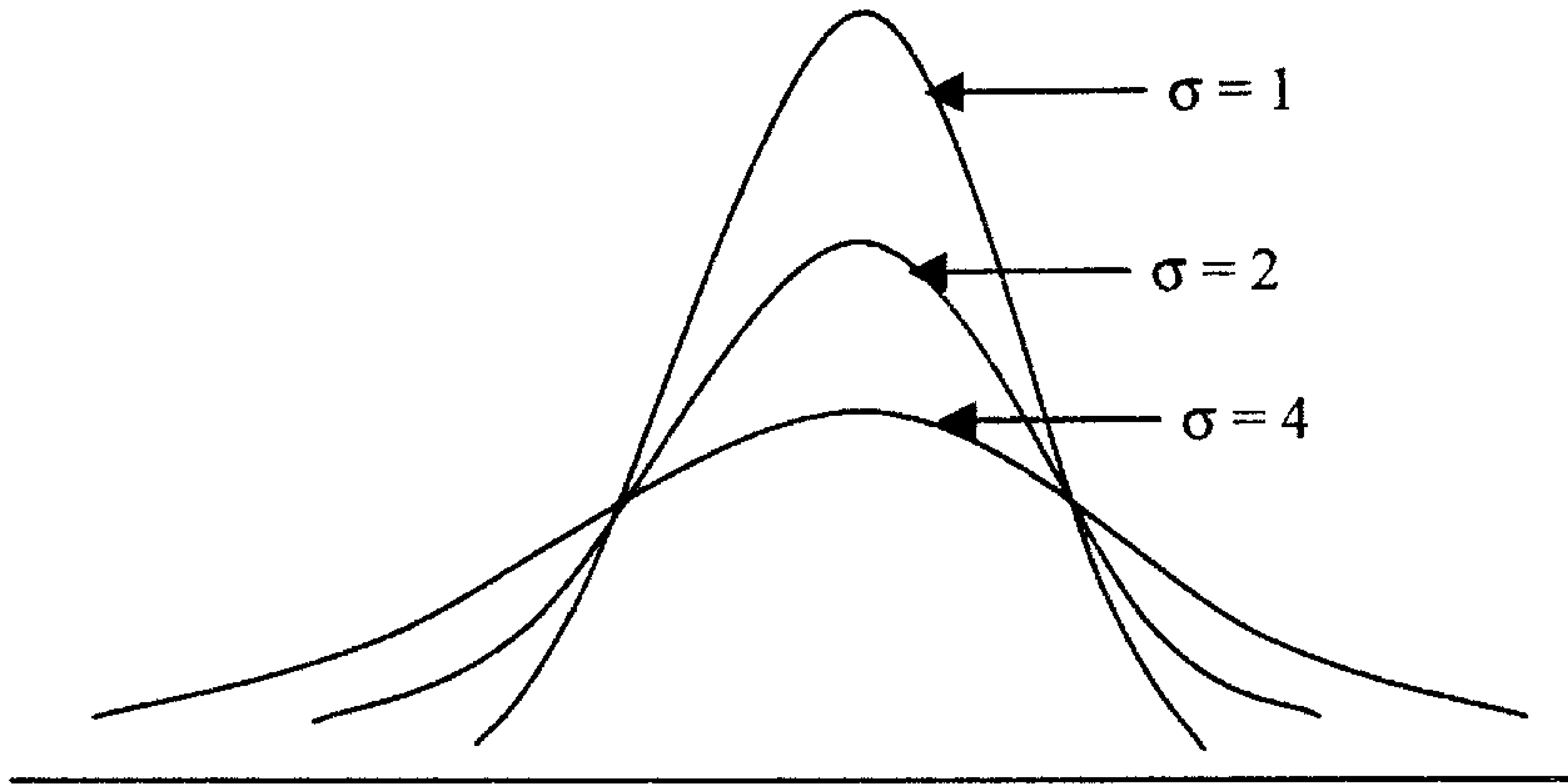


2) إن الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال لكون التوزيع متماثل.

3) أن قيمة الوسط الحسابي وقيمة التباين تحدد شكل وموقع التوزيع فإذا كان التباين كبيراً أدى ذلك إلى تسطح التوزيع، لاحظ الشكل:

الشكل (2ـ2)

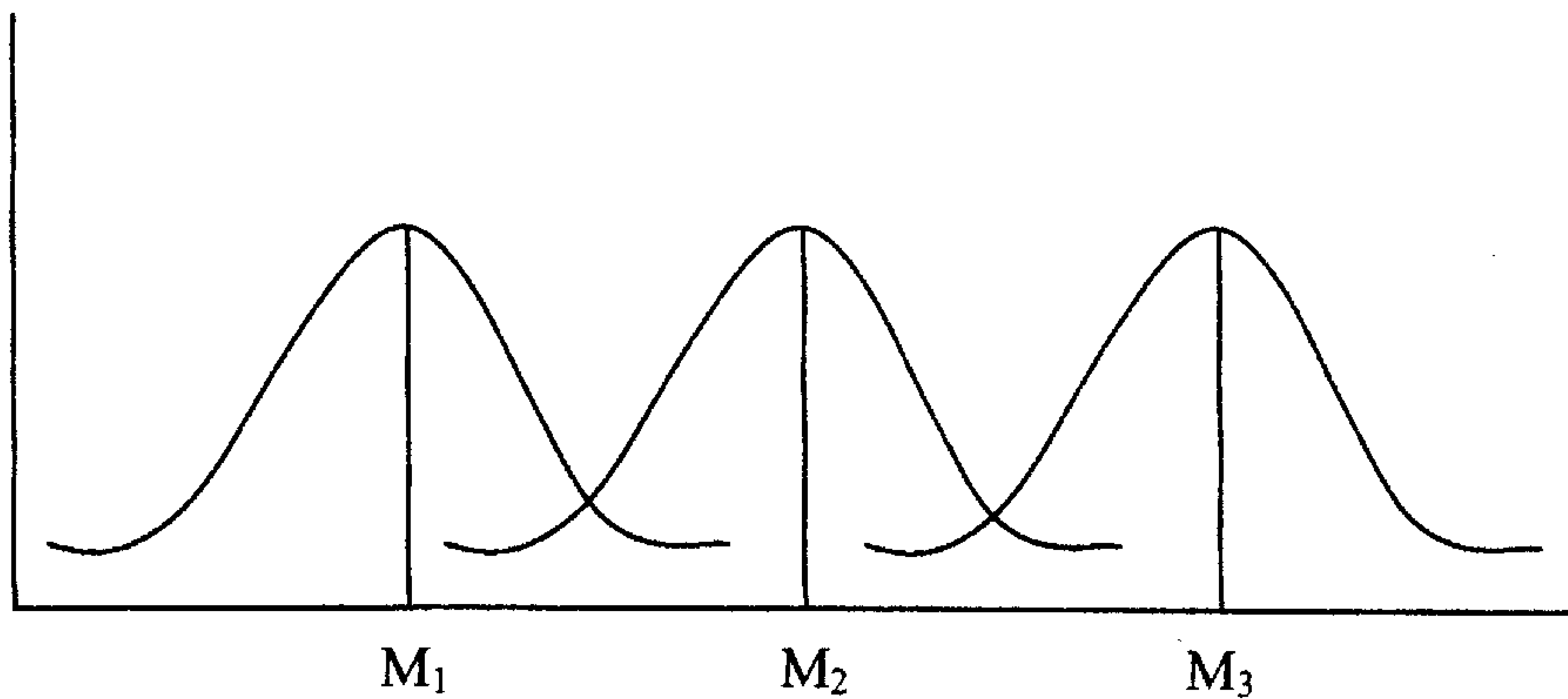
يبين أن قيمة الوسط الحسابي وقيمة التباين تحدد شكل وموقع التوزيع



أما إذا اختلفت قيمة الوسط الحسابي اختلف موقع التوزيع على المحور الأفقي:

الشكل (3ـ2)

يبين اختلاف قيمة الوسط الحسابي واختلاف موقع التوزيع



إن استخراج الاحتمال لقيم X من دالة التوزيع يكون صعباً لذا يمكن استخدام جداول التوزيع الطبيعي لقياس هذا الغرض وذلك بعد تحويل كل قيمة (X) إلى (Z) حيث أن:

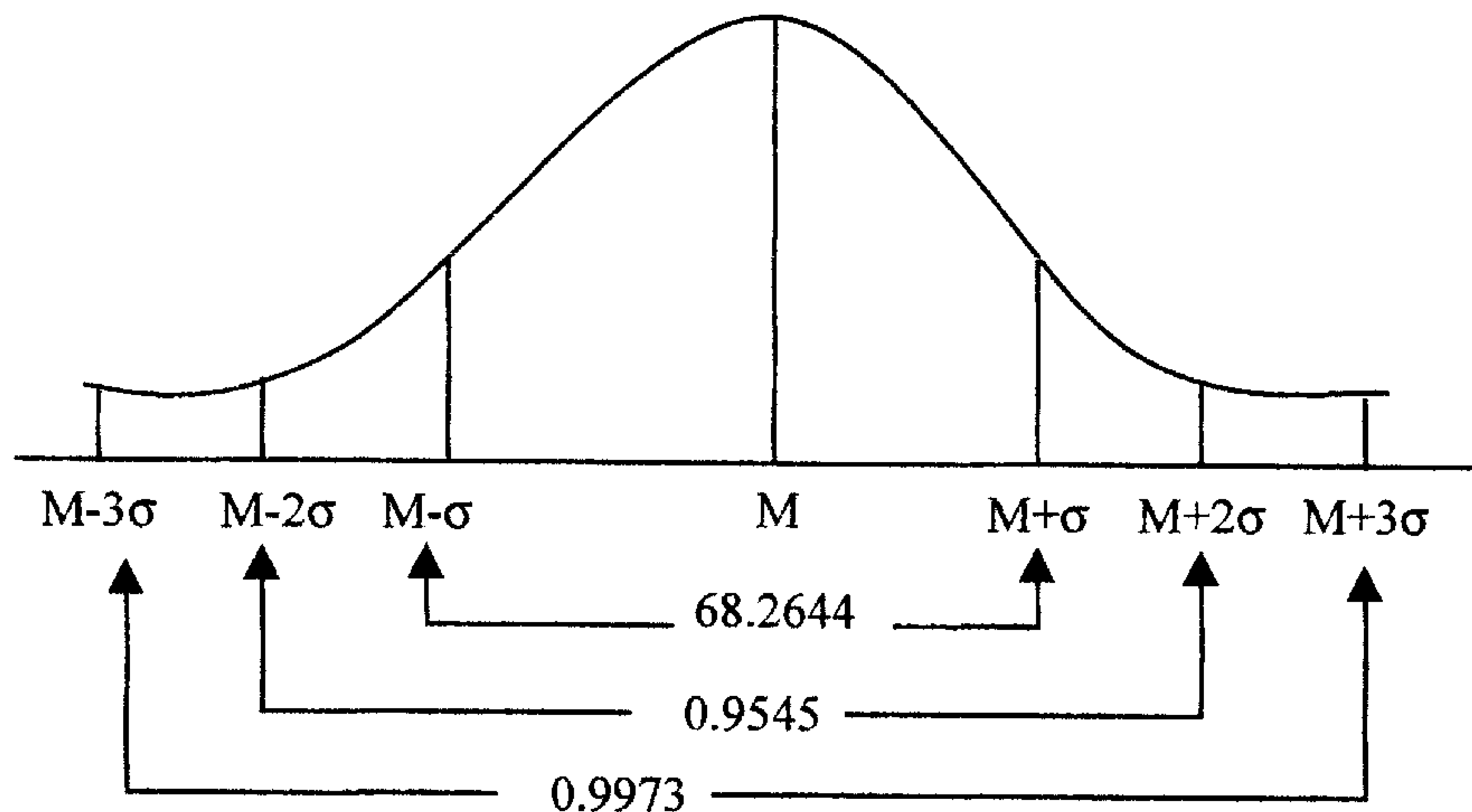
$$Z = \frac{X - M}{c} \qquad \text{.........(2-7)}$$

والتوزيع الطبيعي القياسي له دالة من السهل أن نجد من خلالها الاحتمال المقابل كما أن لهذا التوزيع الذي متوسطه صفر وتباينه 1 جداول إحصائية قياسية يمكن من خلالها حساب المساحة تحت المنحنى والتي تمثل الاحتمال المطلوب.

ومن الخصائص الأخرى للتوزيع الطبيعي أن المساحة تحت المنحنى ما بين M-σ إلى M+σ تساوي 68.2644 من المساحة الكلية والمساحة تحت المنحنى ما بين M-2σ إلى M+2σ هي 0.9545 والمساحة تحت المنحنى ما بين M-3σ إلى M+3σ هي 0.9973.

الشكل (2ـ4)

يوضح خصائص التوزيع الطبيعي



مثال (3.2):

كان متوسط وزن العلبة لمعجون الأسنان منتج في أحد المعامل (100) مل بانحراف معياري مقداره (2.34) مل أوجد:

1. نسبة المنتج الذي عبوته أقل من 98 مل.
2. نسبة المنتج الذي عبوته أكثر من 104 مل.
3. نسبة المنتج الذي تتراوح عبوته ما بين 98 مل إلى 103 مل.

الحل:

M = 100 $\sigma = 2.34$

$$1)\ P(x < 98) = P\left(\frac{x-100}{2.34} < \frac{98-100}{2.34}\right)$$

$$= P(Z < 0.855) \approx P(Z < 0.86)$$

باستخدام جداول التوزيع الطبيعي القياسي

$$P(x < 98) = 0.1949$$

$$2)\ P(x > 104) = 1 - P(x < 104)$$

$$= 1 - P\left(\frac{x-100}{2.34} < \frac{104-100}{2.34}\right)$$

$$= 1 - P(Z < 1.709) = 1 - P(Z < 1.71)$$
$$= 1 - 0.9564 = 0.591264$$

$$3)\ P(98 < x < 103) = P\left(\frac{98-100}{2.34} < \frac{x-100}{2.34} < \frac{103-100}{2.34}\right)$$

$$= P(-0.86 < Z < 1.28)$$

$$= 0.8997 - 0.1949 = 0.7048$$

2.3.2) توزيع مربع كاي Chi – Square Distribution:

هـو توزيـع لمتغير مـستمر (متـصل) ولهـذا الـتوزيع أهمـية كـبيرة في اختبار الفرضيات، ويتـصف هـذا الـتوزيع بأنـه توزيع ذو منحنـى ملتو نحـو الـيمين (الـتواء موجب) وأن قيم المتغير العشوائي (X) لهذا التوزيع موجبة.

إن دالة التوزيع الاحتمالية لهذا التوزيع هـي:

$$f(\chi^2)=\frac{\frac{\chi^2}{e^2}\left(\chi^2\right)^{\frac{n}{x}-1}}{\frac{n}{2}-1\ !\ 2^{\frac{n}{2}}} \qquad 0<\chi^2<\infty \qquad ....(2\text{-}7)$$

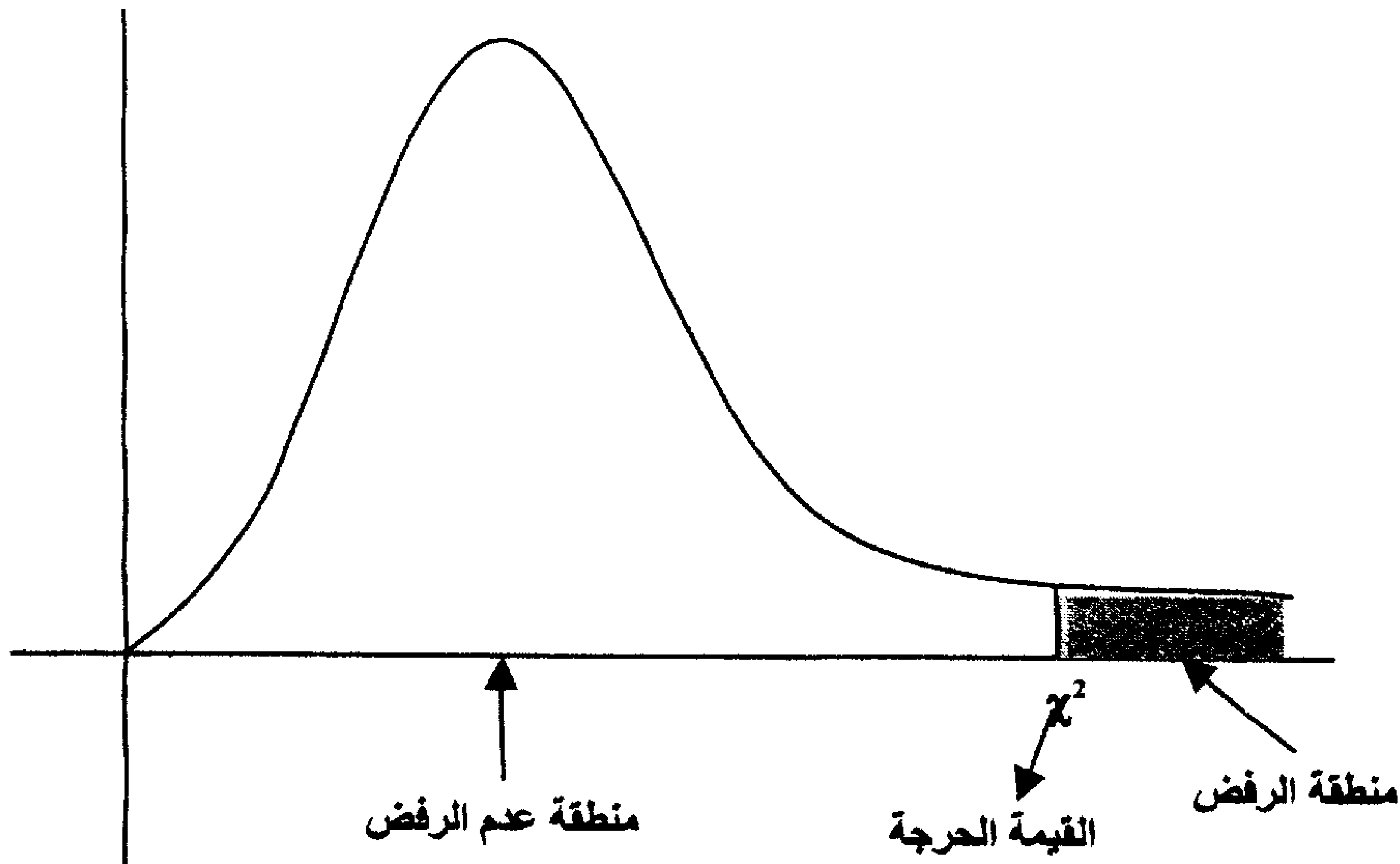
حيث أن n (يمثل حجم العينة) وهـي معلمة التوزيع وتسمى أيضاً درجة حرية التوزيع.

إن الوسـط الحـسابي لقـيم المتغير العـشوائي X الخـاضع لـتوزيع مـربع كـاي هـي (n) كما أن تباين هذه القيم هو (2n).

والشـكل التـالي يمثل شـكل منحنـى توزيع مربع كـاي:

الشكل (5ـ2)

يوضح شكل توزيع مربع كاي



ومن أهم الاختبارات التي تعتمد على توزيع مربع كاي هي:

أ) اختبار يتعلق بتباين المجتمع.

ب) اختبار حول تساوي عدة تباينات.

جـ) اختبار حسن المطابقة.

د) اختبار الاستقلالية.

مثال (4.2):

إذا كان المتغير (χ^2) يتبع توزيع مربع كاي بدرجة حرية (15) أوجد:

1) الوسط الحسابي للمتغير χ^2.

2) التباين لهذا المتغير.

3) $P(\chi^2 > 24.9958)$

4) $P(\chi^2 < 30.5779$

5) $P(24.9958 < \chi^2 < 30.5779)$

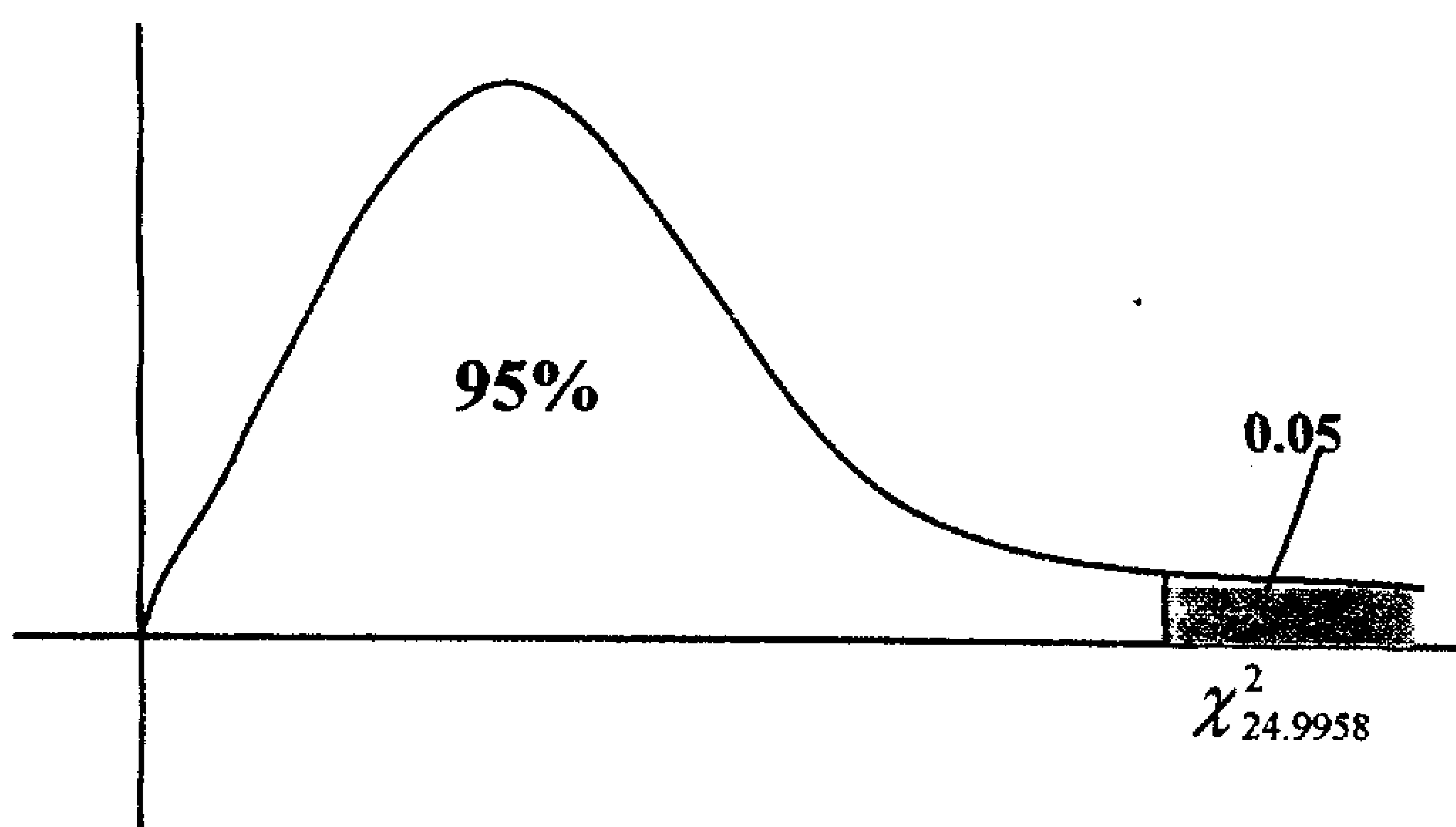
الحل:

1) الوسط الحسابي للتوزيع = n أي أن $M = Ex = 15$

2) أما التباين فهو $\sigma^2 = 2n = 30$

3) $P(\chi^2 > 24.9958)$

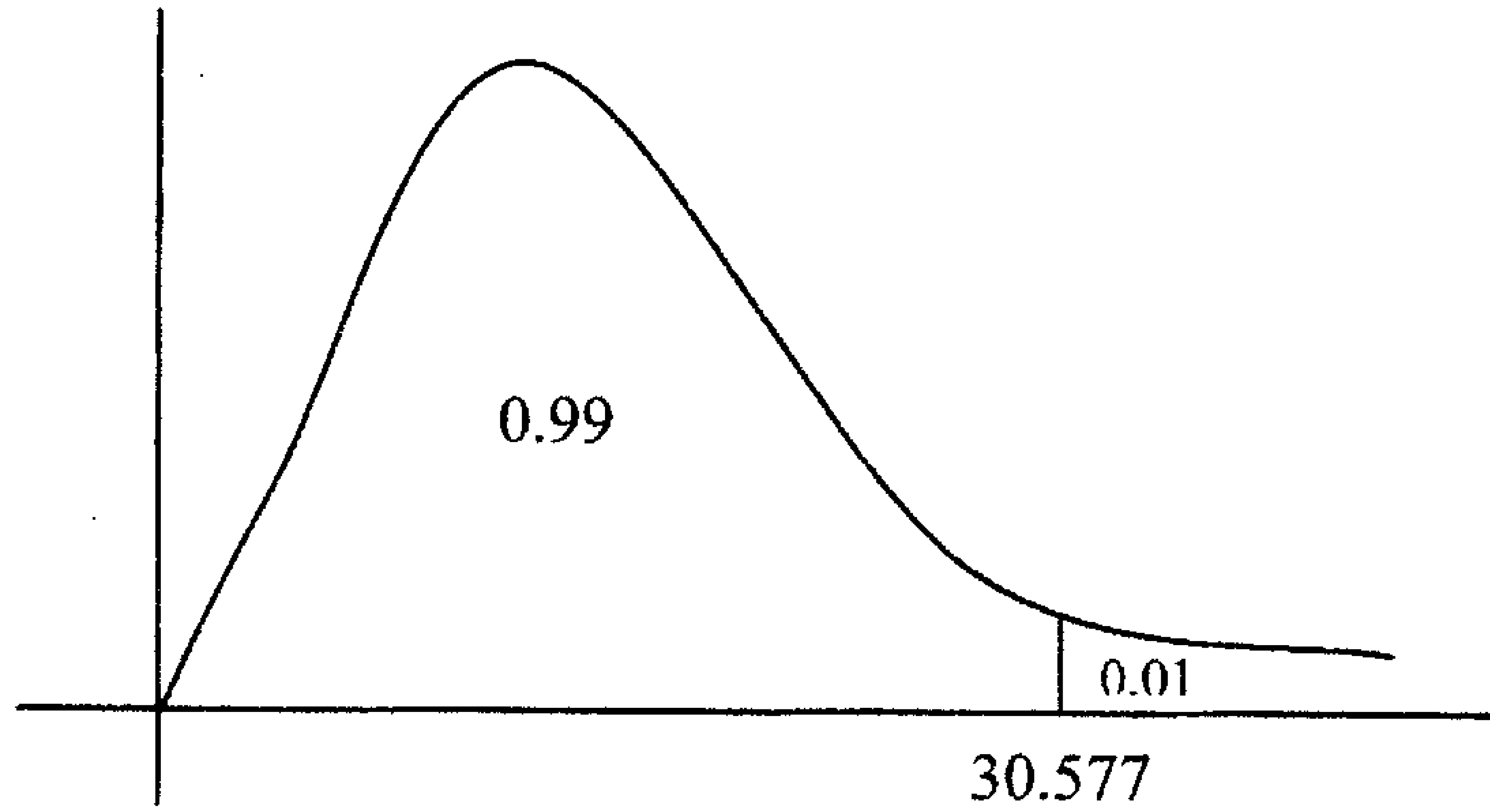
بالعودة إلى جداول مربع كاي في آخر الكتاب ولدرجات حرية (15) نبحث عن قيمة 24.9958 فنجدها مقابلة إلى 0.95 وللتوضيح:



وعليه فإن: $P(\chi^2 > 24.9958) = 0.05$

4) $P(\chi^2 < 30.5779)$

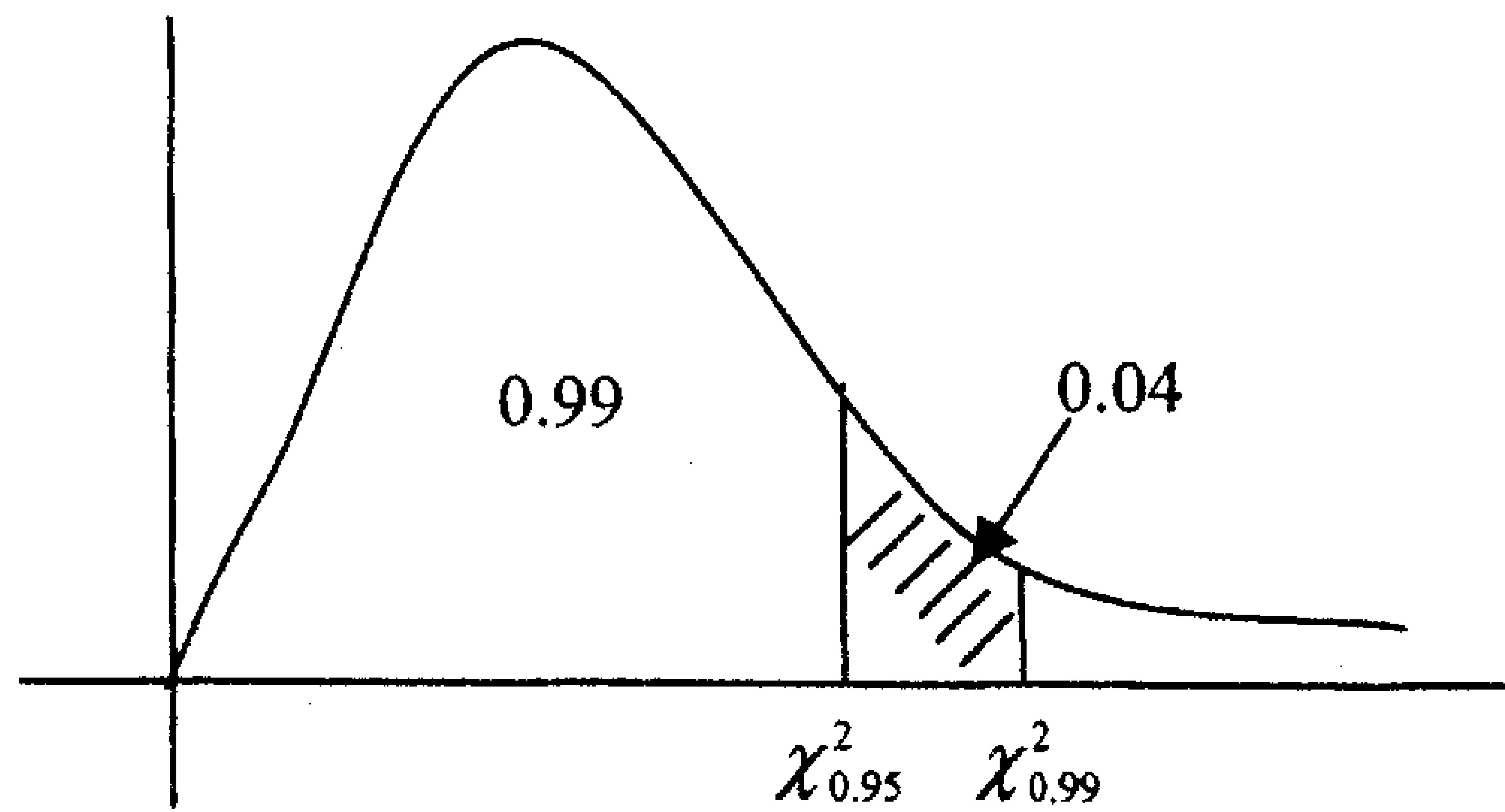
بالرجوع إلى جدول مربع كاي ولدرجة حرية 15 نجد أن 30.5779 تقابل إلى 0.49 وللتوضيح:



وعليه فإن $P(\chi^2 < 30.5779) = 0.99$

5) $P(24.9958 < \chi^2 < 30.5779)$

$$= P(\chi^2 < 30.5779) - P(\chi^2 < 24.9958)$$
$$= 0.99 - 0.95 = 0.04$$



3.3.2) توزيع ستيودنت ـ t   t- Student Distribution:

وهو توزيع لمتغير مستمر ومن التوزيعات ذات الاستخدامات الواسعة لاختبار الفرضيات عندما يكون حجم العينة صغير $(t < 30)$ وتباين المجتمع غير معلوم. والشكل العام لدالة التوزيع هو:

$$f(t)=\frac{\frac{n-1}{2}\,!\;\left(1+\frac{t^{2}}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi n}\;\frac{n-2}{2}\,!}\qquad 0<t<\infty \qquad \ldots\ldots(2\text{-}8)$$

ومن أهم خصائص هذا التوزيع هو:

1) توزيع مماثل حول الوسط الحسابي والذي هو نفس الوسط الحسابي للمتغير القياسي Z الذي يتوزع بوسط حسابي مساوي الأصغر وتباين مساوي إلى (1) أي أن الوسط الحسابي لتوزيع t هو صفر أيضاً.

2) تباين التوزيع هو $\frac{n}{n-2}$ بحيث أن $n > 2$.

3) درجات حرية التوزيع هي تعني درجات حرية توزيع مربع كاي.

مثال (5.2):

إذا كان المتغير t يتوزع توزيع t بدرجة حرية (10)، أوجد:

1) تباين التوزيع.

2) $P(t > 3.169)$

3) $P(t < -1.372)$

الحل:

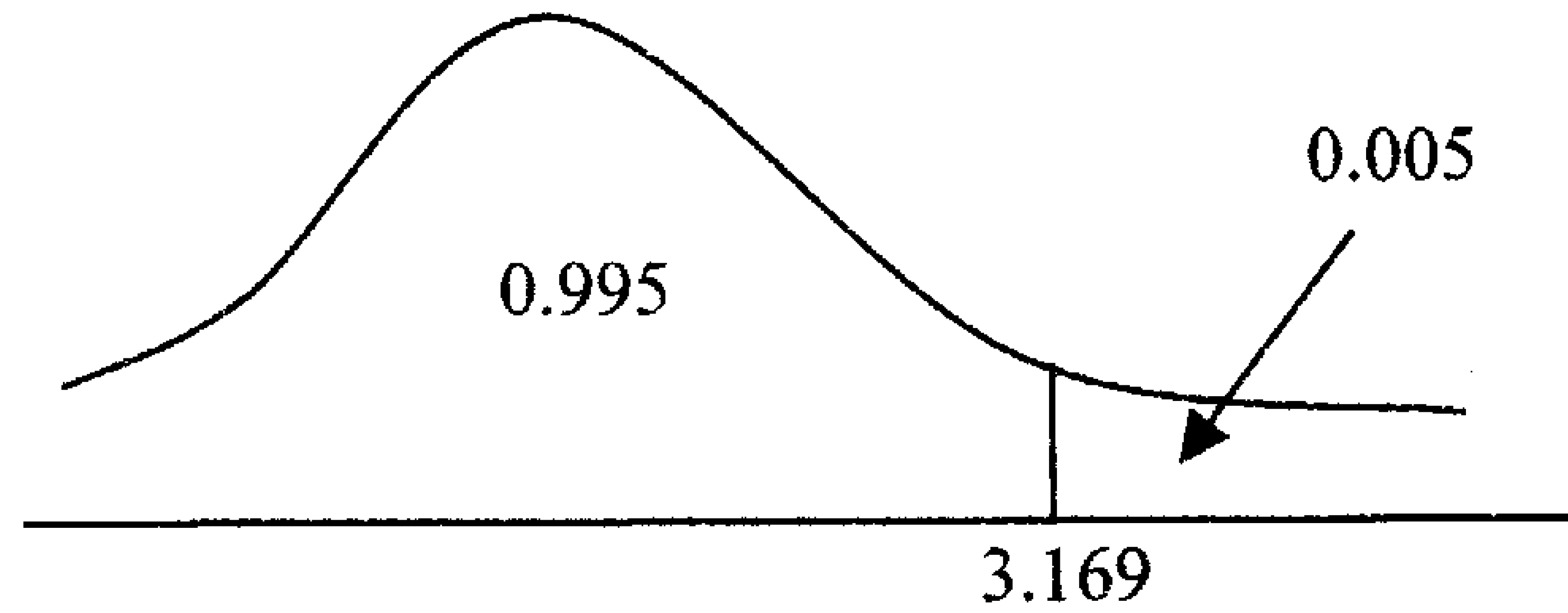
1) تباين التوزيع هو:

$$\frac{n}{n-2}=\frac{10}{10-2}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1.25$$

2) $P(t > 3.169) = ?$

بالعودة إلى جدول t عند درجة حرية (10) فإن:

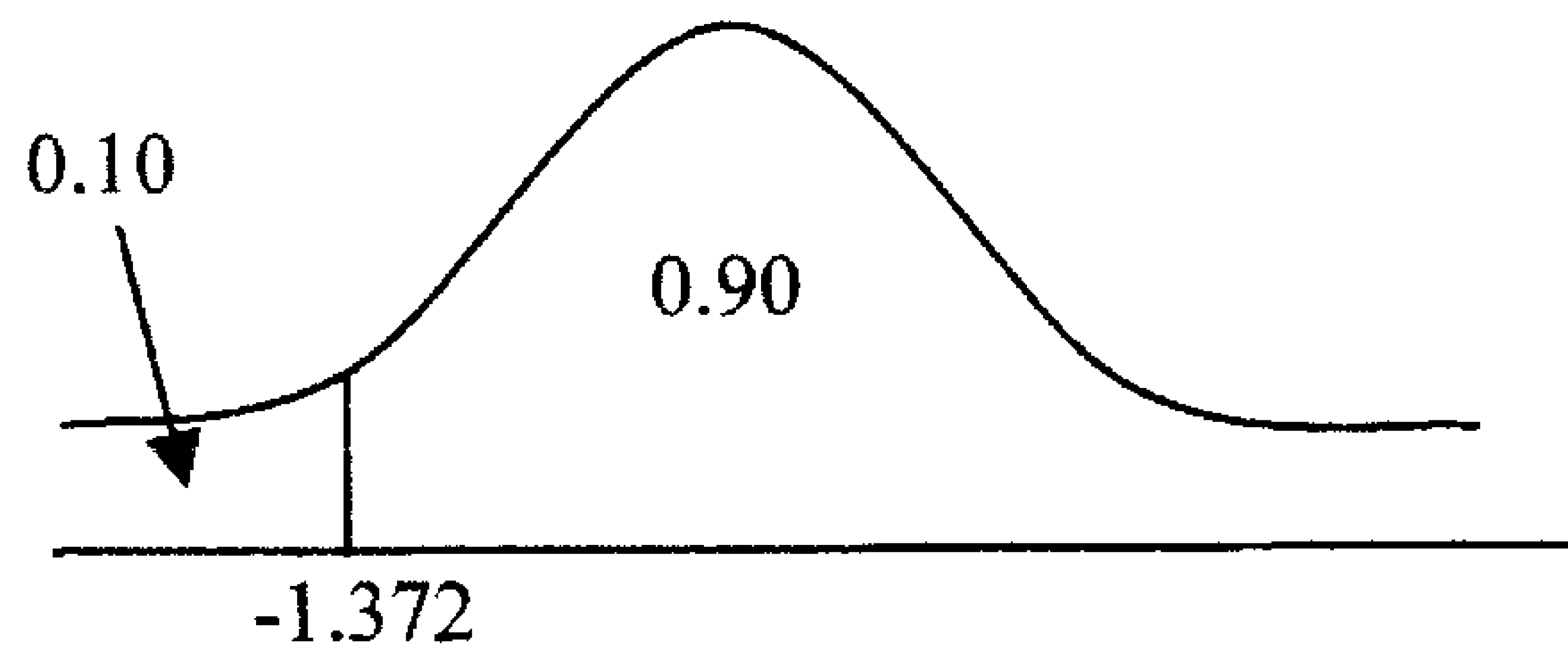
$P(t > 3.169) = 0.005$



3) $P(t < -1.372)$

بالعودة أيضاً لجدول t عند درجة حرية (10) ويكون التوزيع متماثل فإن:

$$P(t < -1.372) = 1 - P(t < 1.372)$$
$$= 1 - 0.90 = 0.10$$



4.3.2) توزيع F :F - Distribution

هو توزيع لمتغير مستمر له استخدامات واسعة في التطبيقات الإحصائية ولاسيما اختبار الفرضيات وهذا التوزيع توزيعاً مشتقاً من توزيعين مستقلين لمربع كاي فإذا كان:

$$\chi_1^2 \sim \chi_{(n1)}^2$$
$$\chi_2^2 \sim \chi_{(n2)}^2$$

فإن توزيع F يمكن اشتقاقه من:

$$F = \frac{\chi_1^2 / n_1}{\chi_2^2 /(n_2)} \sim F(n_1, n_2)$$

أي أنه حاصل قسمة مربع كاي بدرجة حرية n_1 على مربع كاي بدرجة حرية n_2 وتوزيع F هو بدرجتي حرية n_1 , n_2 أما دالة التوزيع فهي:

$$f_{(F)} = \frac{\frac{n_1}{n_2}^{\frac{n_1}{2}} \; \frac{n_1+n_2-2}{2} \; ! \;\; F^{\frac{n_1-2}{2}}}{\frac{n_1-2}{2} \; ! \;\; \frac{n_2-2}{2} \; ! \;\; 1+\frac{n_1}{n} F^{\;\frac{n_1+n_2}{2}}} \qquad 0 < F < \infty \quad ......(2\text{-}9)$$

ومن خصائص هذا التوزيع:

1) قيمة المتغير العشوائي الذي يتوزع توزيع F هو متغير موجب أكبر من الصفر.

2) الوسط الحسابي لقيم F هو $\frac{n_2}{n_2-2}$ بحيث أن $n_2 > 2$

3) تباين قيم F هو $\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$ بحيث أن $N_2 > 4$

مثال (6.2):

إذا كان المتغير العشوائي F يتوزع توزيع F بدرجة حرية 6 للبسط و10 للمقام.

1) حدد شكل الدالة الاحتمالية.

2) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع.

3) تباين التوزيع

4) $Pr(F > 3.22)$

الحل:

1)

$$f_{(F)} = \frac{22.68F^2}{(1+0.6F)^8}$$

2) الوسط الحسابي للتوزيع

$$M = E(x) = \frac{10}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

3) التباين

$$\sigma^2 = \frac{2(10)^2(10+6-2)}{6(10-2)^2(10-4)} = 0.20254$$

4) $P_r(F > 3.22) = 0.05$

4-2 توزيع المعاينة Sampling Distribution:

تسحب العينة من مجتمع إحصائي يخضع المتغير الذي يعرف هذا المجتمع لتوزيع معين ولهذا التوزيع ثوابت تسمى بالمعلمات Parameters والتي تكون بمثابة التعريف بهذا التوزيع أو ذاك، فمثلاً عندما يكون توزيع المجتمع الإحصائي هو التوزيع الطبيعي يكون معالم هذا التوزيع هو الوسط الحسابي للمجتمع M والتباين σ^2 وكذلك عندما يكون توزيع المجتمع توزيع ثنائي الحدين تكون معلمة المجتمع P. وإذا توفرت هذه المعلمات يمكن إيجاد الاحتمالات المتوقعة لأي قيمة من قيم X.

وبالمقابل فإن الثوابت التي تحسب للعينة المسحوبة من هذا المجتمع تسمى بالإحصاءات (statistics) وهي تقابل مفهوم المعلمة في المجتمع ولكن نظراً لأن لكل عينة قيماً للمتغير العشوائي تختلف عن قيم العينة الأخرى تصبح الإحصاءة المستخرجة من عينة ما تختلف عن تلك المستخرجة من عينة أخرى، لذا تصبح هذه الإحصاءات متغيراً عشوائياً يمكن أن يكون له توزيع إحصائي يعتمد على التوزيع الإحصائي للمجتمع الذي تسحب منه هذه العينات ويسمى هذا التوزيع بتوزيع المعاينة Sampling Distributions.

2-4-1 توزيع المعاينة للوسط الحسابي لعينة مسحوبة من مجتمع طبيعي:

Sampling Distribution for the Mean of Normal Distribution

إذا تم سحب عينة عشوائية بحجم n من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط مقداره M وتباين مقداره σ^2 فإن توزيع متوسط هذه العينة $(\overline{X})$ يقترب من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره $M_{\overline{X}} = M$

وتباين مقداره:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{.......} \; (2\text{-}10)$$

مثال (7.2):

إذا كانت الأجور اليومية لإحدى المعامل تتوزع توزيعاً طبيعياً بمعدل (10) دينار وبانحراف معياري مقداره (2) دينار سحبت عينة حجمها (64) عامل أحسب احتمال أن يزيد معدل الأجور عن (11) دينار؟.

الحل:

لإيجاد توزيع المعاينة للمتوسط $(\overline{X})$:

$$M_{\bar{x}} = M = 10$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{64}} = \frac{3.16227766}{8} = 0.39528$$

$$P(\overline{X} > 11) = P \;\; \frac{\overline{X} - 10}{0.39528} \geq \frac{11-10}{0.39528}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{P}\ (\text{Z} \geq 2.52985) \\
&= 1 - \text{P}\ (\text{Z} < 2.52985) \\
&= 1 - \text{P}\ (\text{Z} < 2.53) \\
&= 1 - 0.9943 \\
&= 0.0057
\end{aligned}$$

2-4-2 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين:

Sampling Distribution for the Defference Between Two Sample Means

إذا سحبنا عينة عشوائية بحجم n_1 من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط (M_1) وتباين (σ_1^2) وسحبت عينة أخرى مستقلة عن العينة الأولى بحجم n_2 من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط (M_2) وتباين (σ_2^2) وتم حساب متوسط العينة الأولى فكان $(\overline{X}_1)$ وحساب متوسط العينة الثانية فكان $(\overline{X}_2)$.

فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $(M_1 - M_2)$ وتباين $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$

مثال (8.2):

سحبت عينتين عشوائيتين من شركتين تنتجان مربى الفواكه، فكانت العينة الأولى بحجم (50) علبة ومتوسط العلبة (200) غم بانحراف معياري مقداره (2)، بينما كانت العينة الثانية بحجم (60) علبة ومتوسط العلبة (190) غم بانحراف معياري مقداره (3). احسب احتمال أن معدل وزن العلبة المنتجة من الشركة الأولى أكبر من متوسط وزن العلبة المنتجة في الشركة الثانية بعلى الأقل (11) غم.

الحل:

$$M_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = M_1 - M_2 = 200 - 190 = 10$$

$$\sigma^2_{\overline{X}_1-\overline{X2}} = \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{4}{50}+\frac{9}{60}$$

$$= 0.08 + 0.15$$
$$= 0.23$$

$$\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = 0.4796$$

$$P\left(\bar{X}_1-\bar{X}\geq 11\right)=P\left(\frac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\geq\frac{11-10}{04796}\right)$$

$$= P (Z \geq 2.09)$$
$$= 1 - P (Z \leq 2.09)$$
$$= 1 - 0.9817 = 0.0183$$

3-4-2 توزيع المعاينة لنسبة واحدة Sampling Distribution for:

إذا سحبت عينة عشوائية من مجتمع يتصف بأن كل مشاهدة فيه تتبع توزيع برنوبي أي أن لكل مشاهدة نتيجة تمثل، أما حالة نجاح (تتطبق مع الصفة المطلوبة قيدالدراسة) أو حالة فشل فإن احتمال النجاح في هذه الحالة نرمز له P واحتمال الفشل نرمز له q على أن $P + q = 1$ ويمكن استخراج قيمة P لأي مشاهدة في العينة باستخدام العلاقة التالية:

$$\hat{P}=\frac{X}{n} \qquad \text{.......} (2\text{-}11)$$

حيث أن:

X تمثل عدد المحاولات (النجاحات).

و n يمثل حجم العينة.

و $\hat{P}$ يمثل نسبة أو احتمال النجاح.

ولأن $\hat{P}$ تختلف من عينة لأخرى ولأي قيمة من قيم X لذا تكون $\hat{P}$ متغيراً عشوائياً له توزيعاً يقترب من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره:

$$M_{\hat{P}}=E\left(\hat{P}\right)=E\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{nP}{n}=P \qquad \text{.......} (2\text{-}12)$$

وتباين مقداره:

$$\sigma_{\hat{P}}^2=Var\left(\hat{P}\right)=Var\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{nPq}{n}=\frac{Pq}{n} \qquad \text{.......} (2\text{-}13)$$

وتحت شرط أن تكون قيمة P تقترب من الصفر أو الواحد الصحيح.

مثال (9.2):

إذا كان نسبة المعيب في إنتاج الشركة اليومي (0.01) سحبت عينة بحجم (64) مفردة ما هو احتمال أن يكون نسبة المعيب في هذه العينة يتراوح بين (0.03) إلى (0.05)؟

الحل:

$$M_{\hat{P}} = 0.01$$

$$\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{P\,q}{n}} = \sqrt{\frac{(0.01)(0.99)}{64}} = 0.012437$$

$$P(0.03 \quad < \quad \hat{P} < 0.05) = P \ \ \frac{0.03 - 0.01}{0.012437} < Z < \frac{0.05 - 0.01}{0.01243}$$

$$= \text{P}\ (1.608 < \text{Z} < 3.216209697)$$
$$= 0.9994 - 0.9463$$
$$= 0.0531$$

2-4-4 توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين:

Sampling Distribution for Differences Between Two Proportions

إذا سحبنا عينتان من مجتمعين مستقلين يخضعان لتوزيع ثنائي الحدين بحجم n_1 واحتمال نجاح P_1 للعينة الأولى وبحجم n_2 واحتمال نجاح P_2 للعينة الثانية فإنه لحساب متوسط وتباين العينتين يكون:

$$M_1 = n_1 P_1 \quad , \quad \sigma_1^2 = n_1 P_1 q_1$$

.... (2-14)

$$M_2 = n_2 P_2 \quad , \quad \sigma_2^2 = n_2 P_2 q_2$$

أما توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي العينتين $\left(\hat{P}_1-\hat{P}_2\right)$ فسيقترب من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي =

$$M_{\hat{P}1-\bar{P}2}=P_1 - P_2$$

وانحراف معياري:

$$\sigma_{\hat{P}1-\hat{P}2}=\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}$$

مثال (10.2):

إذا كانت نسبة المدخنين في الجامعة من الذكور هو (0.8) بينما نسبة المدخنين من الإناث هو (0.4) سحبت عينة من الذكور حجمها (60) طالب ذكر وعينة أخرى من الإناث حجمها (50) طالبة. أوجد احتمال أن تكون نسبة المدخنين من الذكور تزيد بمقدار (0.3) على الأكثر عن الإناث.

الحل:

$$M_{\hat{P}1-\hat{P}2}=P_1-P_2=0.8-0.4=0.4$$

$$\sigma_{\hat{P}1-\hat{P}2}=\sqrt{\frac{(0.8)(0.2)}{60}+\frac{(0.4)(0.6)}{50}}$$

$$=0.08637$$

$$P\left(\hat{P}_1-\hat{P}_2 \le 0.3\right) = P\left(Z \le \frac{0.3-0.4}{0.08637}\right)$$

$$=\text{P}\ (\text{Z} \le -1.1578)$$

$$=0.1251$$

أي ما نسبته 12.5٪.

أمثلة محلولة

مثال (11.2):

البيانات التالية تمثل عدد الذين قاموا بفتح حساب لدى البنك خلال الشهر، أوجد التوزيع الاحتمالي لهم:

العدد (X)	عدد الأيام f_i
0	10
1	5
2	4
3	8
4	2
5	1

الحل:

التوزيع الاحتمالي هو الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم المتغير X وعليه سيكون:

X	f_i	P_i
0	10	$\frac{10}{30} = 0.333$
1	5	$\frac{5}{30} = 0.1666$
2	4	$\frac{4}{30} = 0.1333$
3	8	$\frac{8}{30} = 0.2666$
4	2	$\frac{2}{30} = 0.066$
5	1	$\frac{1}{30} = 0.033$
		≈ 1

مثال (12.2):

تقدم لأحد الوظائف (7) أشخاص، ما هو احتمال:

1. أن لا يتعين أي منهم في هذه الوظائف.
2. أن يتعين واحد فقط.
3. أن يتعين اثنين فقط.
4. أن يتعين على الأقل واحد فقط.
5. أن يتعين على الأكثر واحد فقط.
6. ما هو العدد المتوقع للمتعينين منهم (متوسط عدد الذين يقبلوا للتعيين).
7. ما هو التباين في عدد المقبولين للتعيين.

الحل:

التوزيع المطلوب هو توزيع ثنائي الحدثين حيث أن:

$$n = 7 \qquad P = \frac{1}{2} \qquad q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1)\ P(x=0) = C_0^7 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0.007815$$

$$2)\ P(x=1) = C_1^7 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} = 0.0546875$$

$$3)\ P(x=2) = C_2^7 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-2} = 0.164062$$

$$4)\ P(x \ge 1) = 1 - P\ (X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.007815 = 0.992185$$

$$5)\ P(x \le 1) = P\ (X=1) + P\ (X=1) = 0.007185 + 0.0546875 = 0.0618725$$

$$6)\ M = E_x = n\ .\ P = 7 \left(\frac{1}{2}\right) = 3.5$$

$$7)\ \sigma^2 = n\ .\ p.q = 7 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1.75$$

مثال (13.2):

إذا كان احتمال حدوث توقف في أي ماكنة من مكائن المعمل هو (0.01) فإذا تم وضع (50) ماكنة في العمل ما هو احتمال أن يحدث توقف في:

1. ماكنة واحدة فقط.
2. على الأقل ماكنة واحدة.
3. متوسط عدد المكائن التي يمكن أن تتوقف.
4. التباين في عدد المكائن التي يمكن أن تتوقف.

الحل:

التوزيع هنا توزيع بواسون بمعلمة مساوية إلى:

$$\lambda = n \cdot p = 50\,(0.01) = 0.5$$

1) $P(x=1) = \dfrac{e^{-0.5}(0.5)^1}{1!} = 0.30326$

2) $P(x \geq 1) = 1 - P(x<1) = 1 - P(x=0)$

$$= 1 - \frac{e^{-0.5}(0.5)^0}{0!} = 0.393469$$

3) $M = E(x) = \lambda = 0.5$

4) $\sigma^2 = \lambda = 0.5$

مثال (14.2):

إذا كان متوسط علامات الطلبة في أحد الامتحانات (70.5) بانحراف معياري مقداره (3.2) فإذا علمت أن علامات الطلبة يتبع التوزيع الطبيعي، أوجد:

1. نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 67 لغاية 71.
2. نسبة الطلبة الذين علاماتهم تجاوزت 72.
3. نسبة الطلبة الذين انخفضت علاماتهم عن 70.
4. نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 67.3 إلى 73.7
5. نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 64.1 إلى 76.9
6. نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 60.9 إلى 80.1.

الحل:

$M = 70.5$ $\sigma = 3.2$

1) $P(67 < X < 71) = P\left(\frac{67-70.5}{3.2} < Z < \frac{71-70.5}{3.2}\right)$

$= P(-1.09375 < Z < 0.16)$

$= N(0.16) - N(-1.09)$

$= 0.5636 - 0.1379 = 0.4257$

أي أن النسبة هي تقريباً 43٪ من الطلبة الممتحنين.

2) $P(X > 72) = 1 - P(X < 72)$

$= 1 - P\left(Z < \frac{72-70.5}{3.2}\right)$

$= 1 - P(Z < 0.46875)$

$= 1 - P(Z < 0.47)$

$= 1 - N(0.47)$

$= 1 - 0.6808$

$= 0.3192$

أي النسبة هي تقريباً 32٪.

3) $P(X < 70) = P\left(Z < \frac{70-70.5}{3.2}\right)$

$= P(Z < -0.15625)$

$= N(-0.15625)$

$= 0.4404$

أي النسبة هي تقريباً 44٪.

4) $P(67.3 < X < 73.7) = P\left(\frac{67.3-70.5}{3.2} < Z < \frac{73.7-70.5}{3.2}\right)$

$= P(-1 < Z < 1)$

$= N(1) - N(-1)$

$= 0.8413 - 0.1587$

$= 0.6826$

وهي النسبة بين $M-\sigma$ و $M+\sigma$

$$5)\ P(64.1 < X < 76.9) = P\left(\frac{64.1-70.5}{3.2} < Z < \frac{76.9-70.5}{3.2}\right)$$

$$= P(-2 < Z < 2)$$
$$= N(2) - N(-2)$$
$$= 0.9772 - 0.0228$$
$$= 0.9544$$

وهي النسبة بين $M-2\sigma$ و $M+2\sigma$

$$6)\ P(60.9 < X < 80.1) = P\left(\frac{60.9-70.5}{3.2} < Z < \frac{80.1-70.5}{3.2}\right)$$

$$= P(-3 < Z < 3)$$
$$= N(3) - N(-3)$$
$$= 0.9987 - 0.0013$$
$$= 0.9974$$

وهي النسبة بين $M-3\sigma$ و $M+3\sigma$

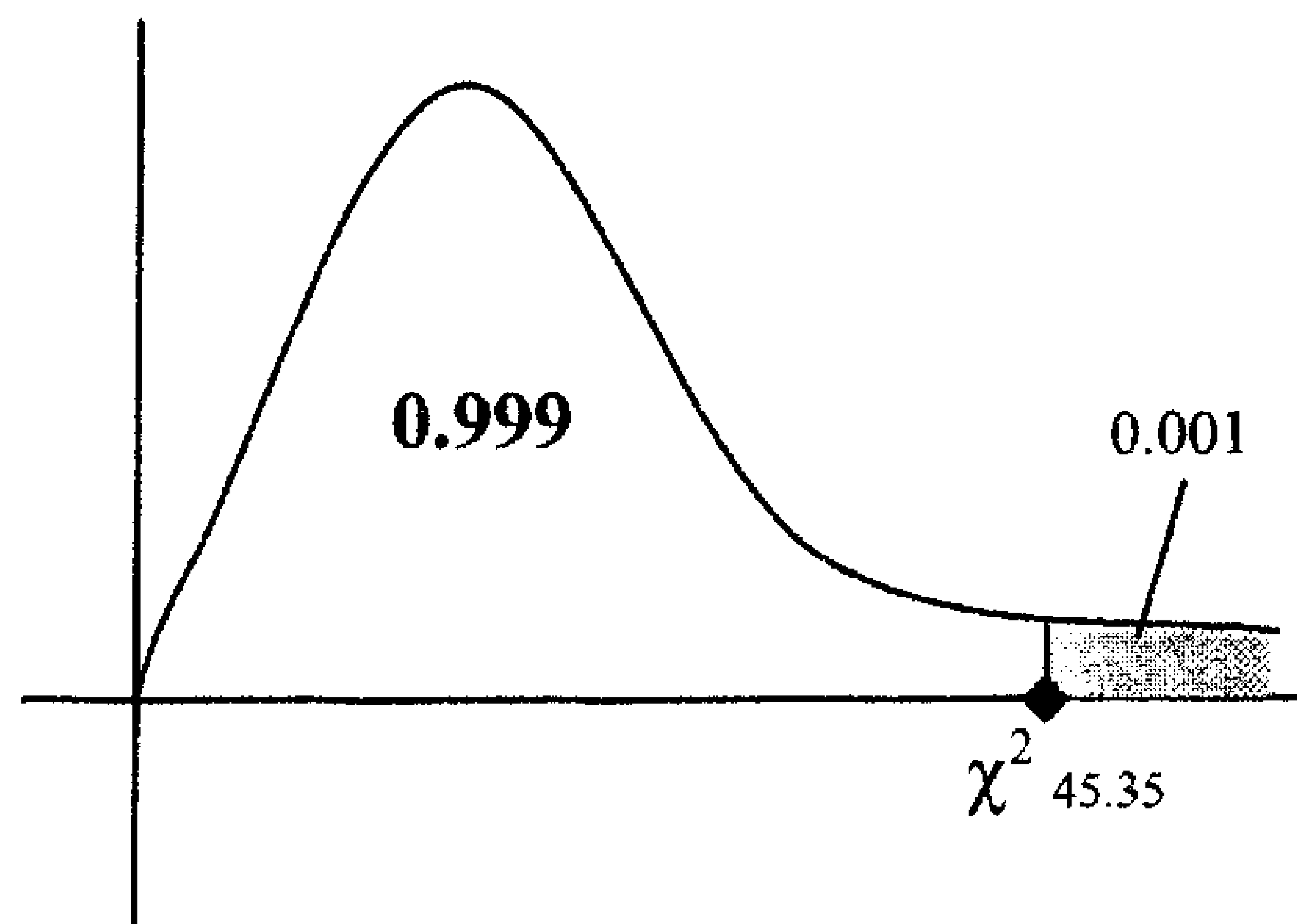
مثال (15.2):

إذا كان المتغير (χ^2) يتبع توزيع مربع كاي بدرجة حرية (20) أوجد:

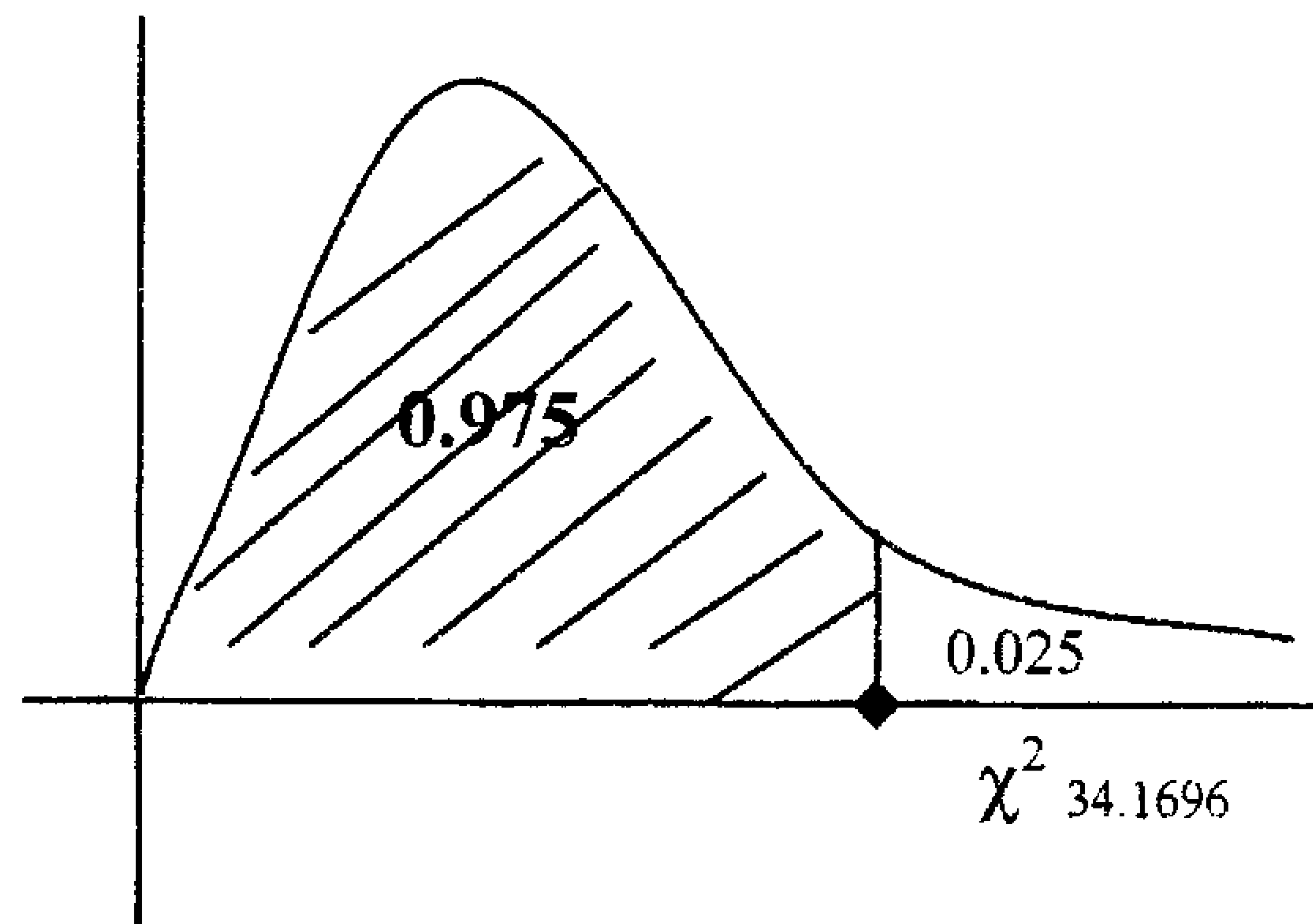
1. الوسط الحسابي للمتغير.
2. التباين للمتغير.
3. $P(\chi^2 > 45.315)$
4. $P(\chi^2 < 34.1696)$
5. $P(28.4120 < \chi^2 < 34.1696)$

الحل:

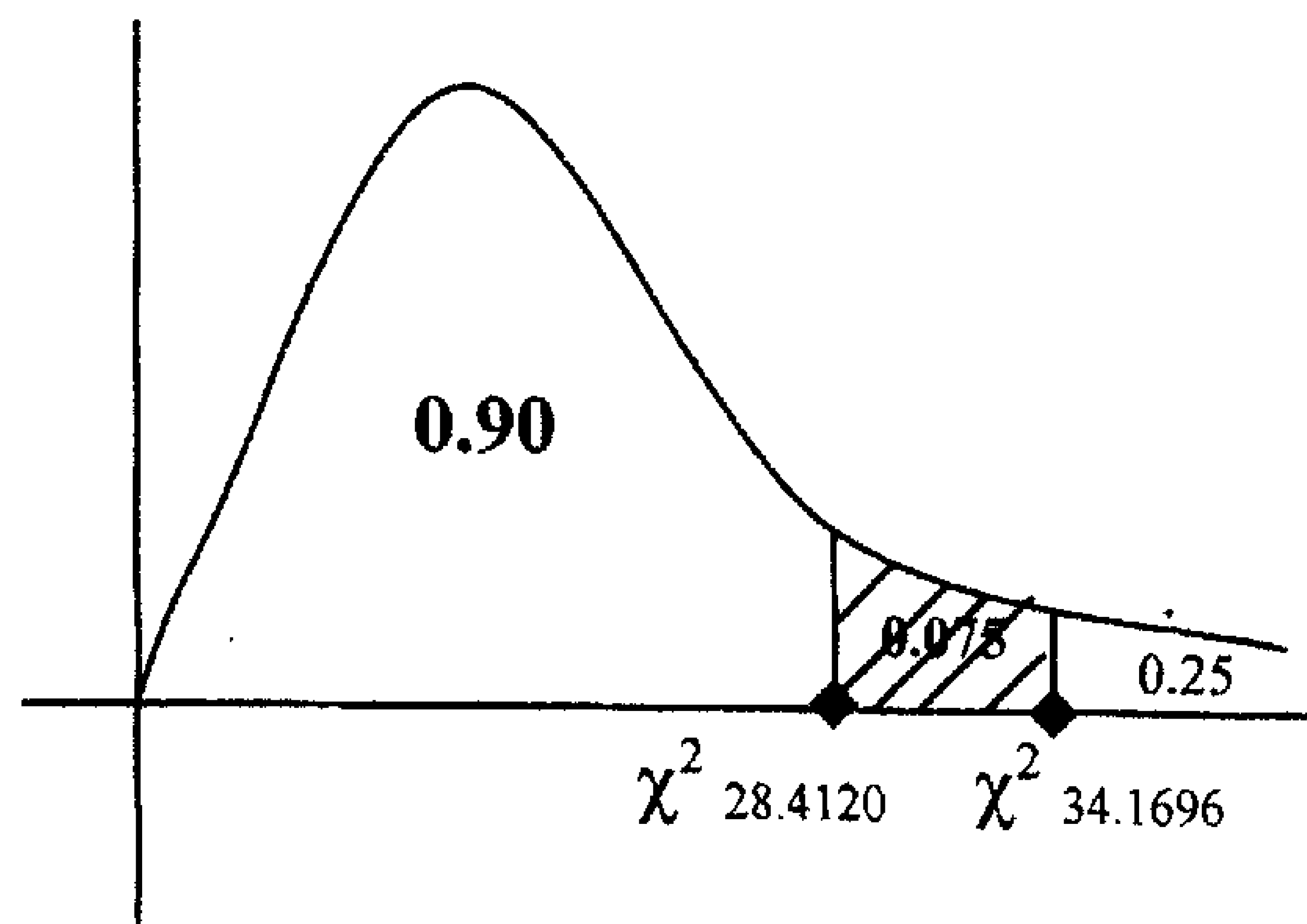
1) $M = E(x) = 20$
2) $\sigma^2 = 2n = 40$
3) $P(\chi^2 > 45.315) = 0.01$



4) $P(\chi^2 < 34.1696) = 0.975$



5) $P(28.4120 < \chi^2 < 34.1696) = 0.975 - 0.90$
$= 0.075$



مثال (16.2):

إذا كان المتغير (t) يتوزع بتوزيع (t) بدرجة حرية (20) أوجد.

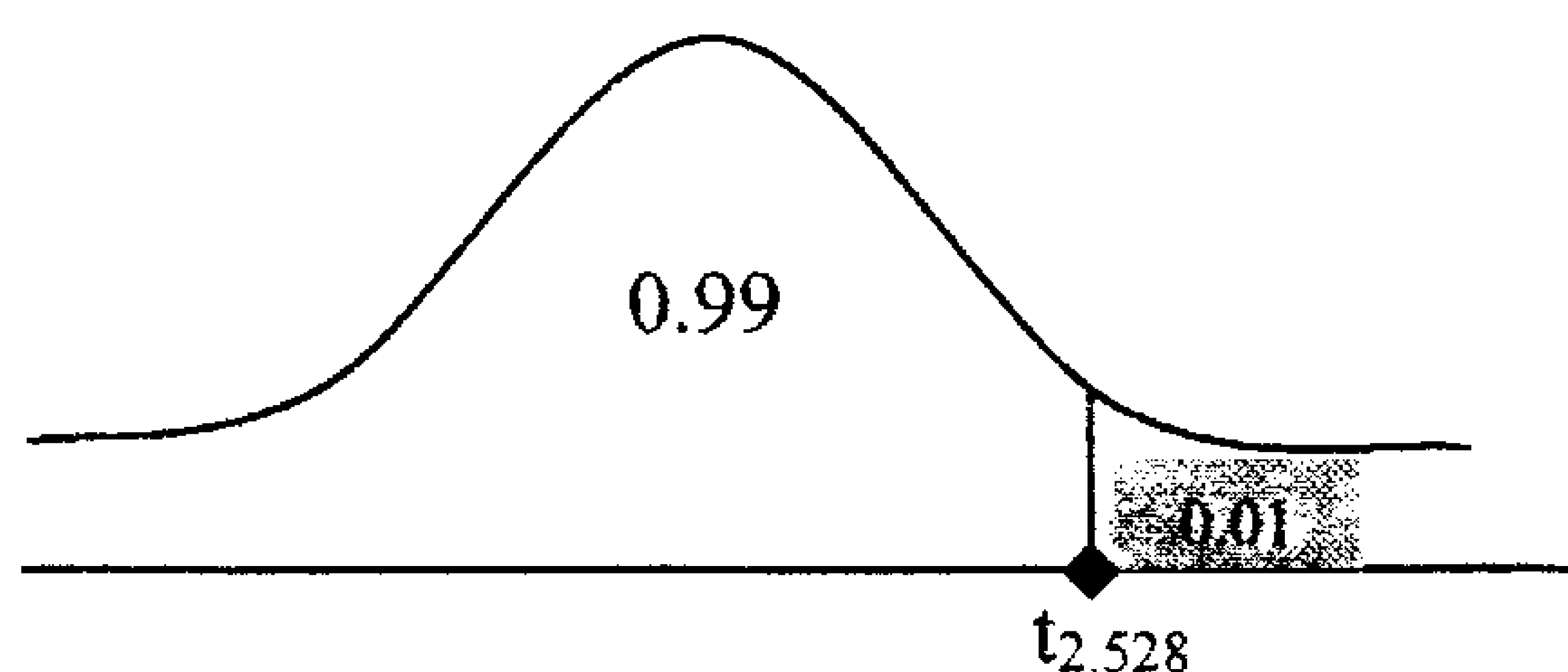
1. تباين التوزيع.
2. P (t > 2.528)
3. P (t < 1.725)
4. P (t < 1.725)

الحل:

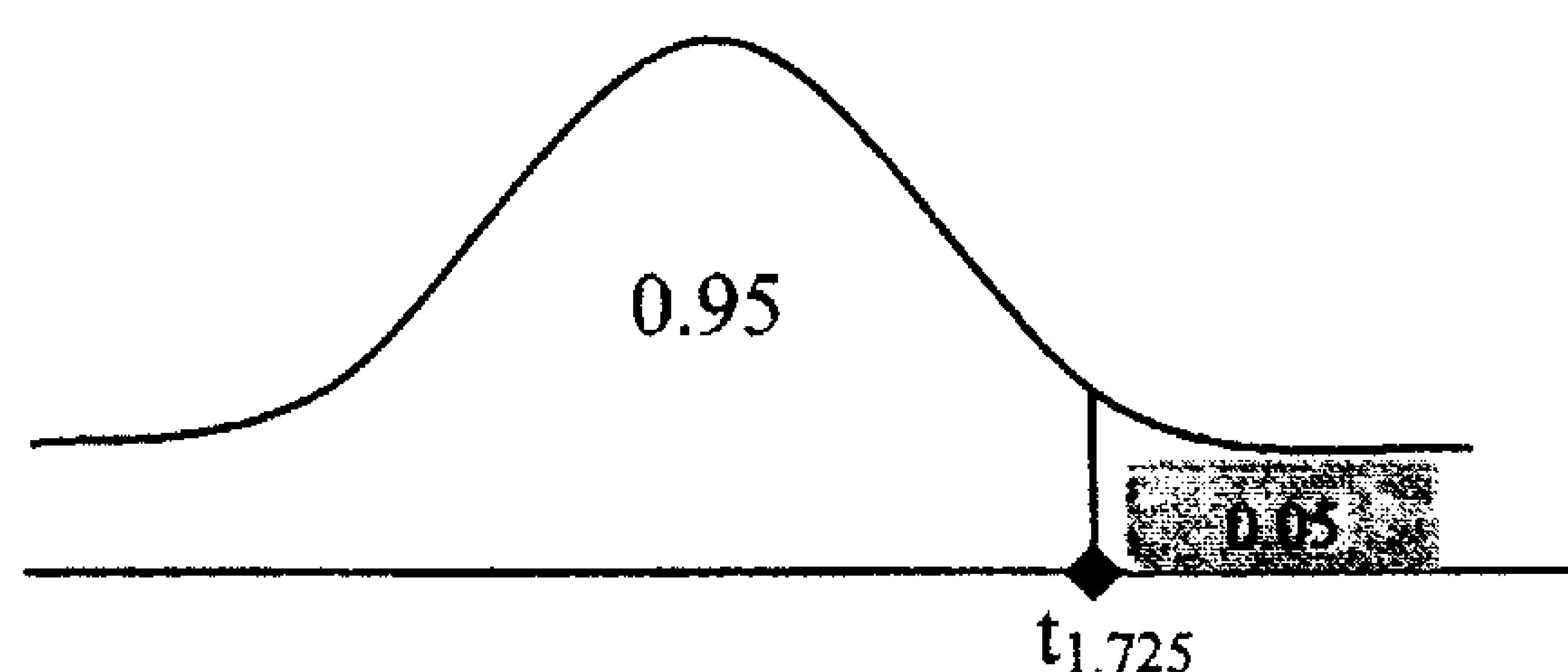
1) تباين التوزيع هو:

$$\frac{n}{n-2} = \frac{20}{20-2} = \frac{20}{18} = 1.111$$

2) P (t > 2.528) = 0.01



3) P (t < 1.725) = 0.95



4) P (t < -1.725) = 1 – P (t < 1.725)
= 1 – 0.95
= 0.05

مثال (17.2):

إذا كان المتغير F يتوزع توزيع F بدرجة حرية 10 للبسط و20 للمقام.

1. أوجد الوسط الحسابي للتوزيع.
2. أوجد تباين التوزيع.
3. P (F > 2.35)
4. P (F > 33.7)

الحل:

$$1)\ M = E(x) = \frac{20}{20-2} = 1.111$$

$$2)\ \sigma^2 = \frac{2(20)^2(20+10-2)}{10(20-2)^2(20-4)} = \frac{22400}{51840} = 0.43209876$$

3) P (F > 2.35) = 0.05

4) P (F > 3.37) = 0.01

مثال (18.2):

إذا كان متوسط وزن علبة العصير الذي ينتجه المعمل هو (200) مل بانحراف معياري مقدار (3.42) مل، سحبت عينة حجمها (50) علبة ما هو احتمال أن يقل متوسط وزن العلبة عن (198) مل.

الحل:

$$M_{\overline{X}} = M = 200$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3.42}{\sqrt{50}} = 0.48366$$

$$P(\overline{X} < 199) = P\ \frac{\overline{X}-200}{0.48366} < \frac{199-200}{0.48366}$$

$$= P\ (Z < -2.06756)$$

$$= P\ (Z < -2.07)$$

$$= 0.0192$$

مثال (19.2):

سحبت عينة بحجم (50) طالب من جامعة (A) فكان متوسط علامة النجاح (75) بانحراف معياري مقداره (5) وسحبت عينة بحجم (55) طالب من الجامعة (B) فكان متوسط علامة النجاح (70) بانحراف معياري مقداره (3). احسب احتمال أن معدل علامات الطلبة للجامعة (A) أكبر من معدل علامات الطلبة للجامعة (B) بمقدار (6).

الحل:

$$M_{\overline{X1}-\overline{X2}} = M_1 - M_2 = 75 - 70 = 5$$

$$\sigma^2_{\overline{X1}-\overline{X2}} = \frac{\sigma^1_2}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2} = \frac{25}{50} + \frac{9}{55} = 0.663636$$

$$P(\overline{X_1} - \overline{X_2} \geq 6) = P \ \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (M_1 - M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \geq \frac{6-5}{0.81463879}$$

$$= \text{P}\ (Z > 1.2275379)$$
$$= 1 - \text{P}\ (Z < 1.2275379)$$
$$= 1 - \text{P}\ (Z < 1.23)$$
$$= 1 - 0.8888$$
$$= 0.1112$$

مثال (20.2):

إذا كان احتمال ارتفاع السهم لكل يوم (0.01) سحبت عينة من (50) سهم في تداول اليوم ما هو احتمال أن يكون نسبة الأسهم التي يمكن أن ترتفع تتراوح من (صفر) إلى (0.02).

الحل:

$$M_{\hat{P}} = 0.01$$

$$\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0.01)(0.99)}{50}} = 0.01407$$

$$P(0 < \hat{P} < 0.02) = P \quad \frac{0.0 - 0.01}{0.01407} < Z < \frac{0.02 - 0.01}{0.01407}$$
$$= P\,(-0.71073 < Z < 0.71073)$$
$$= P\,(-0.71 < Z < 0.71)$$
$$= N\,(0.71) - N\,(-0.71)$$
$$= 0.7611 - 0.2389$$
$$= 0.5222$$

مثال (21.2):

إذا كان نسبة مستخدمي البطاقة الائتمانية للبنك (A) (0.06) بينما نسبتهم في بنك (B) (0.05) سحبت عينة بحجم (64) من البنك (A) و(49) من البنك (B). أوجد احتمال أن نسبة مستخدمي البطاقة الائتمانية في البنك (A) يزيد بمقدار (0.02) عن البنك (B).

الحل:

$$M_{\hat{P}1-\hat{P}2} = P_1 - P_2 = 0.06 - 0.05 = 0.01$$

$$\sigma_{\hat{P}1-\hat{P}2} = \sqrt{\frac{(0.06)(0.94)}{64} + \frac{(0.05)(0.95)}{49}}$$
$$= \sqrt{0.00088125 + 0.0009694}$$
$$= 0.04301903$$

$$P\ (\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \leq 0.02) = P \quad Z < \frac{0.02 - 0.01}{0.04301903}$$
$$= P\,(Z < 0.2324)$$
$$= P\,(Z < 0.23)$$
$$= 0.5910$$

أسئلة الفصل الثاني

س1: الجدول التالي يبين عدد الوحدات المنتجة خلال (30) يوم أوجد التوزيع الإحصائي لعدد الوحدات المنتجة:

عدد الأيام	عدد الوحدات المنتجة
4	10
6	20
12	30
6	40
2	50

س2: لوحظ في إحدى المصانع المخصصة لإنتاج الإطارات أن (0.03) من الإطارات غير صالحة للاستخدام ولغرض فحص الجودة تم سحب عينة عشوائية بحجم (15) إطار ما هو احتمال:

1. أنه لا يوجد أي إطار في العينة معيب.
2. هناك إطار واحد في العينة معيب.
3. هناك على الأكثر ثلاث إطارات معيبة.
4. متوسط عدد الإطارات المعيبة في العينة.
5. التباين في عدد الإطارات المعيبة في العينة.

س3: لوحظ في إنتاج أحد المعامل من المصابيح الكهربائية أن من بين كل (200) مصباح منتج واحد معيب ففي إنتاج (400) مصباح ما هو احتمال:

1. أن يكون أحد المصابيح معيبة.
2. على الأقل أحد المصابيح معيب.
3. على الأكثر أحد المصابيح معيب.

س4: إذا كان متوسط الحوادث اليومية في العاصمة عمان (10) حوادث اصطدام يومياً فخلال الشهر القادم ما هو احتمال:

1. حدوث على الأقل حادثة اصطدام واحدة.
2. حدوث أكثر من حادثتين.
3. ما هو متوسط عدد حوادث الاصطدام يومياً.

س5: إذا كان وزن مجموعة من الأشخاص يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط (70) كغم وبانحراف معياري مقداره (5) كغم ما هي نسبة الأشخاص الذين:

1. تتراوح أوزانهم بين 65 إلى 75 كغم.
2. أكثر من 70 كغم.
3. أقل من 60 كغم.
4. أكثر من 80 كغم.

س6: أوجد قيمة α لما يلي:

$t(\alpha, 10) = 1.372$

$t(\alpha, 15) = 1.753$

س7: أوجد قيمة α لما يلي:

$\chi^2_{\alpha,10} = 15.9872$

$\chi^2_{\alpha,20} = 28.4120$

س8: إذا كانت درجة حرية البسط والمقام هي 20 أوجد قيمة α:

$F_{\alpha,20,20} = 2.94$

الفصل الثالث

مفاهيم أساسية
في اختبار الفرضيات

الفصل الثالث

مفاهيم أساسية في اختبار الفرضيات

3-1 اختبار الفرضيات:

اختبار الفرضيات هو أسلوب أو طريقة لاتخاذ قرار حول معلومة أو أكثر للمجتمع باستخدام معلومات العينة المسحوبة من هذا المجتمع، لذا يرتبط اختبار الفرضيات بمفهوم الإحصاء الاستدلالي والذي يبدأ بتقدير معالم المجتمع من العينة المسحوبة منه ثم نقوم باختبار ما إذا كانت هذه المعالم المقدرة مطابقة إلى معالم المجتمع. مثل الاختبار حول المتوسط أو التباين أو غيرها من الاختبارات والتي يكون صحة تقديرها يحتاج إلى اختبار لاتخاذ قرار حولها، ولغرض فهم موضوع اختبار الفرضيات لا بد من التعرف على المفاهيم التالية:

3-1-1 فرضية العدم والفرضية البديلة Null an Alternative Hypothesis:

وهما فرضيتان يتم إجراء البحث على أساسهما وهما:

أ) الفرضية الصفرية (فرضية العدم) Null Hypothesis:

وتسمى أيضاً الفرضية المحايدة ونرمز لها بالرمز (Ho) وهي الفرضية التي تقوم على افتراض يجري عليه الاختبار لرفضه أو قبوله فعندما يدعي معملاً لإنتاج مواسير المياه أن متوسط قطر الأنبوب هو (0.5) سم تكون الصيغة العامة لهذه الفرضية:

$$Ho = M = 0.5$$

أي أننا افترضنا أن هذه المعلومة صحيحة ولغرض تأكيدها بالقبول أو رفضها يجري الاختبار.

كما أنه إذا كانت الدراسة قائمة على أساس دراسة تأثير مجموعة متغيرات مستقلة على متغير تابع فإن الصيغة العامة للفرضية الصفرية أو فرضية العدم هو:

لا يوجد تأثير للمتغيرات المستقلة على المتغير التابع: Ho

ويجرى الاختبار لتأكيد هذه المعلومة أو رفضها.

ب) الفرضية البديلة Aleternative Hypotesis:

وهي الفرضية الملازمة أو المكملة للفرضية الصفرية أو فرضية العدم، ويرمز لها بالرمز H_1 أو H_A وتصاغ بشكل مكمل للفرضية الصفرية، فمثلاً إذا كان اختبارنا يقوم على أن ادعاء المعمل أنه ينتج مواسير مياه بمتوسط قطر للأنبوب مساوي إلى (0.5) سم وأردنا دراسة هل يوجد اختلافات معنوية عن هذا المتوسط فإن الفرضية البديلة تصبح:

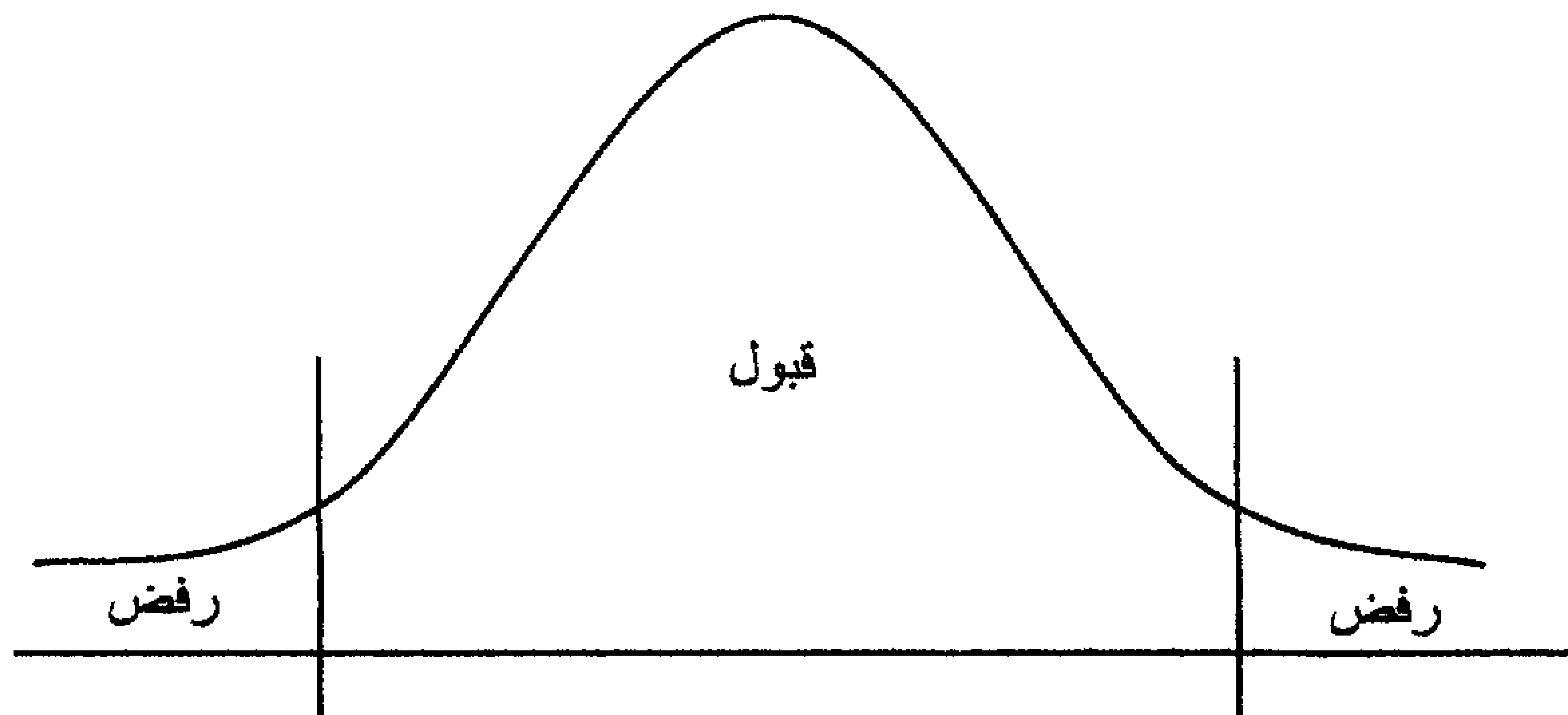
$$H_1 : M \neq 0.5$$

وبهذه الحالة فإن الاختبار يسمى اختباراً من جانبين two - tailed test.

ولتوضيح ذلك ولو افترضنا أن متوسط المجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً واعتماداً على الفرضية البديلة يكون هناك منطقتان للرفض أحدهما إلى اليمين والأخرى إلى اليسار، لاحظ الشكل التالي:

شكل (3ـ1)

يوضح مناطق الرفض والقبول لاختبار من جانبين



ولو ادعى معملاً لإنتاج معجون الأسنان أن متوسط العبوة المنتجة لا يقل عن (100) غم فإن الفرضية الصفرية أو فرضية العدم ستكون:

$Ho : M \geq 100$

وعادة ما يكتب $Ho : M = 100$

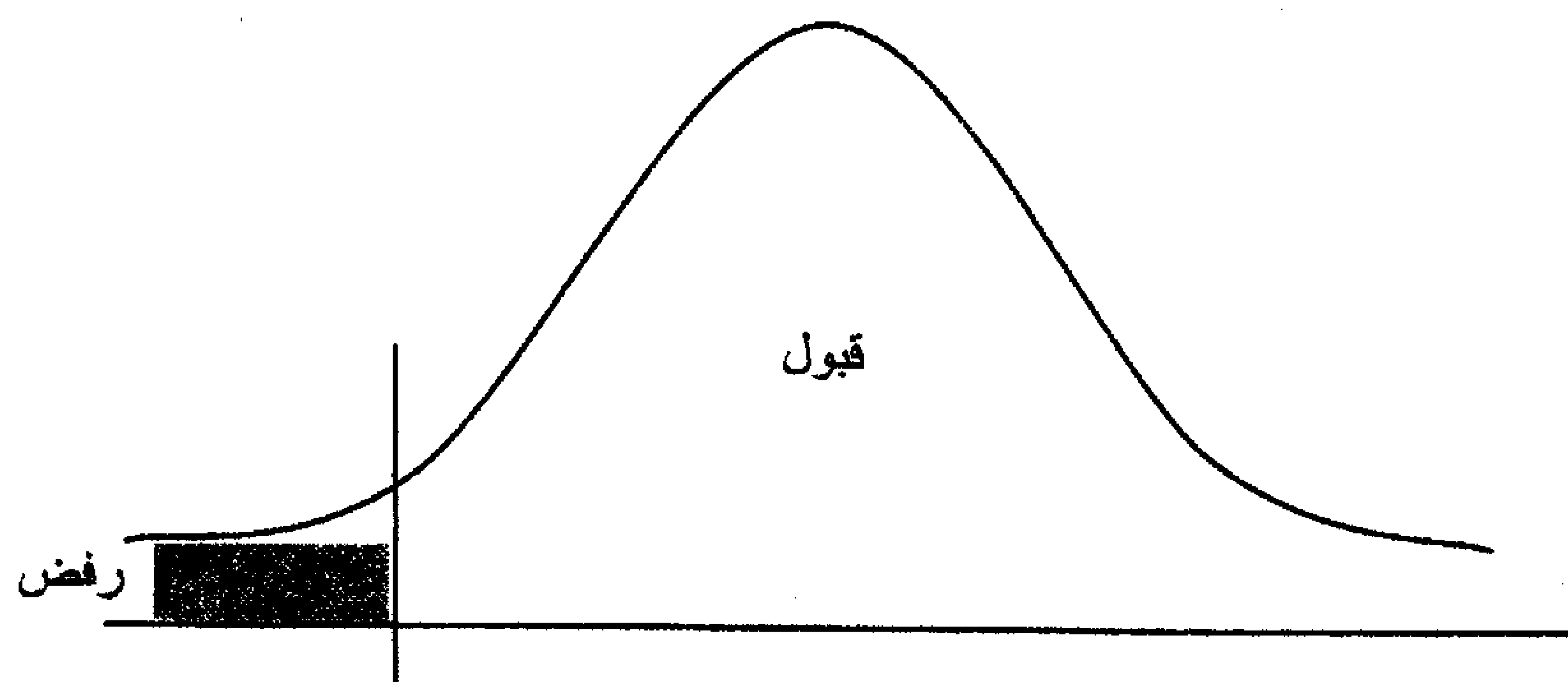
أما الصيغة العامة للفرضية البديلة فهي:

$H_1 : M < 100$

وتوضح الفرضية البديلة أن متوسط المعلمات المستخرجة من العينة المسحوبة لغرض الاختبار يقل عن 100 غم، ويسمى هذا الاختبار اختباراً من جانب واحد one tailed test، وتكون منطقة الرفض إلى اليسار لمنحنى التوزيع، ولو افترضنا أن الاختبار لمتوسط مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً فإن الشكل التالي يوضح منطقة الرفض والقبول:

شكل (3ـ2)

يوضح منطقة الرفض والقبول لاختبار من جانب واحد (الرفض إلى اليسار)



ولو ادعى معملاً أن متوسط المعيوب في المنتج لا يزيد عن 2 لكل (100) وحدة منتجة ستكون صيغة فرضية العدم أو الفرضية الصفرية:

$Ho : M \leq 2$

وتكتب عادة $Ho : M = 2$

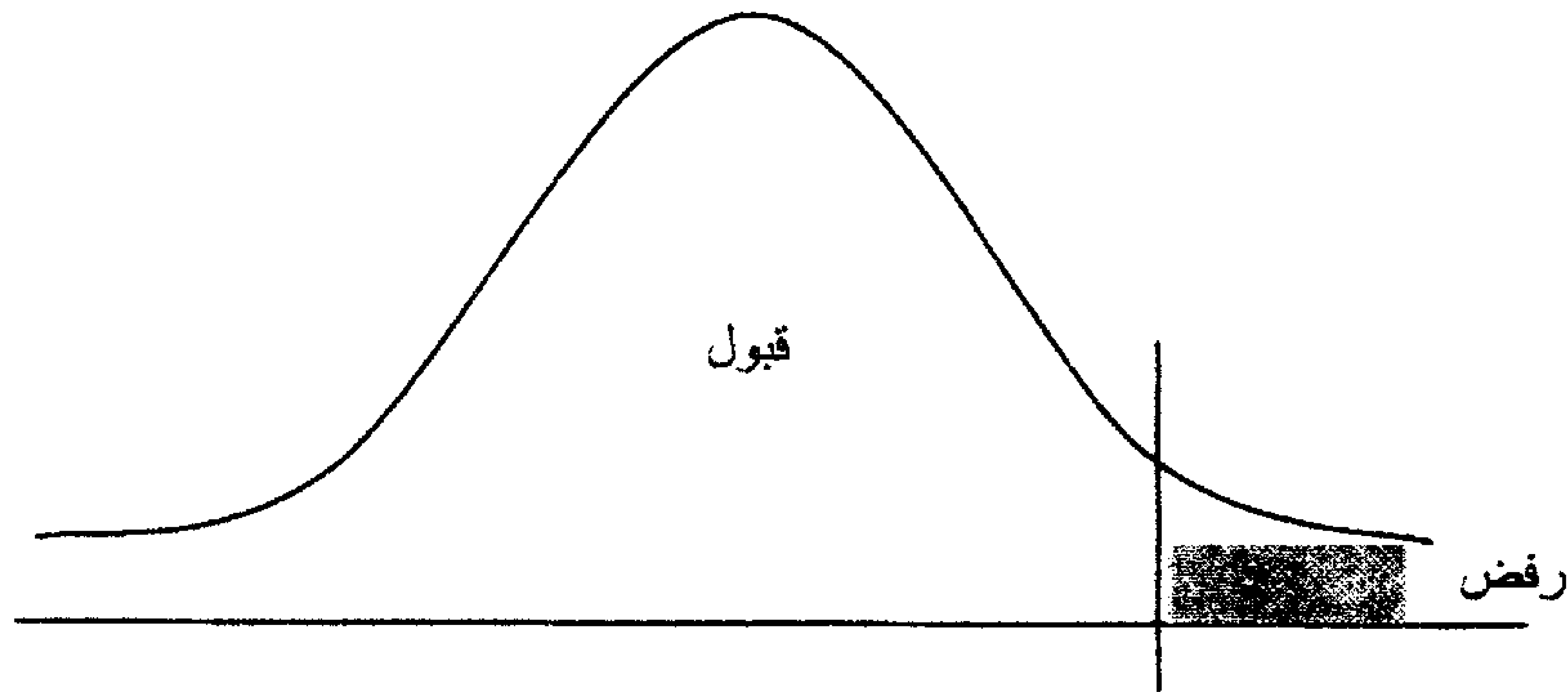
أما الفرضية البديلة فتكون صيغتها:

$H_1 : M > 2$

وهذا الاختبار من جانب واحد أيضاً وتكون منطقة الرفض في الجهة اليمنى من المنحنى (إذا افترضنا أن التوزيع هو توزيعاً طبيعياً).

شكل (3ـ3)

يوضح منطقة الرفض والقبول لاختبار من جانب واحد (الرفض إلى اليمين)



3-1-2 الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني Type I and type II eror:

وهي أخطاء قد يقع فيها الباحث أثناء إجراء الاختبار إذا اعتمد على معالم أو معلومات مستنبطة من عينة كانت قياساتها غير صحيحة. ولذا فإن اتخاذ القرار يقع في نوعين من الأخطاء وهما:

أ) الخطأ من النوع الأول (Type I error):

ومفاده أننا نرفض فرضية العدم Ho عندما تكون صحيحة.

ب) الخطأ من الثاني (Type II error):

ومفاده أننا نقبل فرضية العدم Ho عندما تكون غير صحيحة ويرمز له بالرمز B.

ويمكن إيجاز هاتين الخطأين في الجدول التالي:

الفرضية Ho \ القرار	رفض Ho	قبول Ho
صحيحة	قرار خاطئ خطأ من النوع الأول	قرار صحيح
غير صحيحة	قرار صحيح	قرار خاطئ الخطأ من النوع الثاني

3-1-3 مستوى المعنوية (الدلالة) Level of Significance:

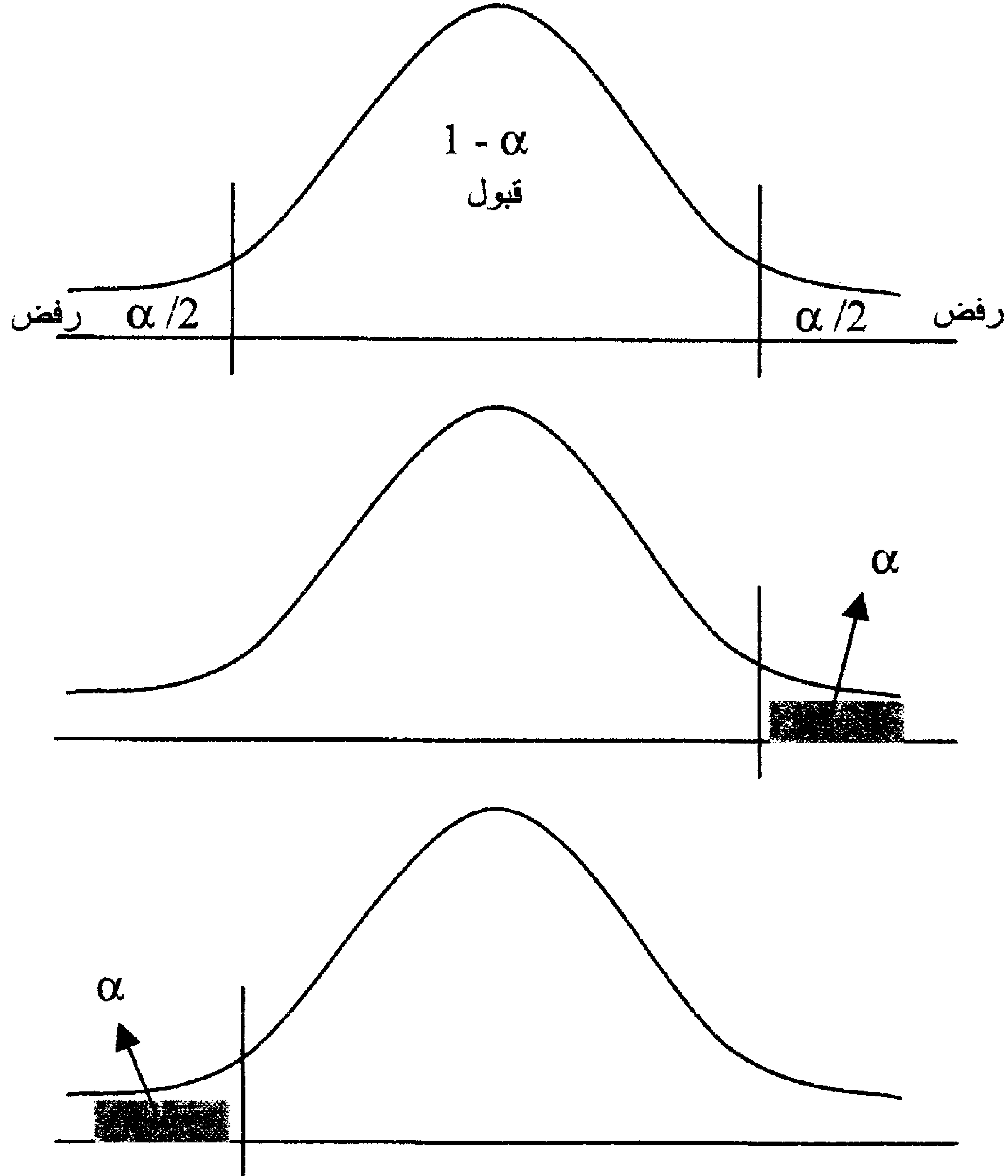
وهـي احتمال رفض Ho عندما تكون صحيحة أي أن الخطأ من النوع الأول ويرمـز لـه عـادة بالرمـز (α) ويعـرفه آخرون الحد المسموح به للخطأ من النوع الأول وعـادةً فـإن مـكملة هـذا الاحـتمال هو مستوى الثقة بالقرار المتخذ في ظل الاختبار فـإذا كـان مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$) فإن الثقة باتخاذ القرار هو ($1- \alpha = 0.95$) وتحـدد قيمة (α) مسبقاً وجرت العادة على أن تكون قيمتها في معظم الاختبارات هـي (0.05) أو (0.01) وكلما قلت قيمة (α) يقل احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول وازدادت الثقة باتخاذ القرار.

وتجـدر الإشـارة إلى أن قـيمة (α) يتأثـر بنـوع الاختبار فإذا كـان الاختبار من جانبين فإن قيمة (α) تقسم على 2 وتصبح $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ لكل جانب من الجوانب.

أمـا إذا كـان الاختبار من جانب واحد فإن قيمة (α) تبقى كما هي، وهذا يؤثـر في القيمة الجدولية المستخرجة للمقارنة مع القيمة المحسوبة والتي تسمى إحصاءة الاختبار.

شكل (4.3)

يوضح الاختبار لجانب واحد ولجانبين



4-1-3 قوة الاختبار Power of the test (P. o. t):

وهو احتمال رفض Ho عندما تكون غير صحيحة وهو مساوٍ إلى (1 – B) حيث أن B هو احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني.

3-1-5 عينة البحث:

إن إجراء اختبار الفرضية يعتمد بشكل أساسي على اختيار عينة من مجتمع الدراسة، وهذه العينة يجب أن تمثل هذا المجتمع أحسن تمثيل، بمعنى أن المؤشرات الإحصائية المستخرجة من هذه العينة يجب أن تكون تقديرات صحيحة لمعالم هذا المجتمع، ولأن عملية اختيار العينة يتأثر بمجموعة عوامل منها الوقت والجهد والتكاليف، فإنه يجب الموازنة بين هذه العوامل ودقة عملية سحب العينة بحيث لا نقوم بسحب عينة لا تؤمن لنا هذه المؤشرات بدقتها المطلوبة.

وأهم ما يميز هذه العينات المستخدمة في الاختبار عدد مفرداتها، فإذا كان حجم العينة أكبر من (30) مفردة اعتبرت هذه العينة عينة كبيرة واقتربت من التوزيع الطبيعي.

أما إذا كان حجم العينة أقل من (30) مفردة تكون من نوع العينات الصغيرة والتي تخضع إلى توزيع أخرى منها توزيع t وتوزيع مربع كاي X^2.

3-1-6 المؤشر الإحصائي (المقدر) والمعلمة الإحصائية:

لكل مجتمع مجموعة معالم تصف هذا المجتمع، والمعلمة الإحصائية ثابتة في هذا المجتمع. ومن أمثلة معالم المجتمع المتوسط العام للمجتمع (M) وتباين هذا المجتمع (σ^2) لمجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً.

أما المؤشرات الإحصائية المستخرجة من العينة المسحوبة من هذا المجتمع والتي هي عبارة عن مقدرات لمعالم هذا المجتمع تكون متغيرة من عينة لأخرى، لذا فإن طريقة سحب العينة ودقتها هي التي يمكن أن تؤمن مؤشرات ومقدرات لمعالم هذا المجتمع، فالمؤشر الإحصائي المستخرج من العينة والذي يمثل متوسط القيم هو $\left(\bar{X}\right)$ وهو تقدير للمتوسط العام (M) وكذلك فإن (S^2) التباين المستخرج من العينة هو تقدير للمعلمة (σ^2) التي تمثل تباين المجتمع.

3-1-7 الخطأ المعياري للمقدر أو للمؤشر الإحصائي:

The Standard Error of the Estimator

لما كانت المؤشرات الإحصائية أو المقدرات تستخرج من العينة تكون هذه المؤشرات أو المقدرات متغيرة من عينة إلى أخرى، لذا ستكون هذه المؤشرات أو المقدرات متغيرة من عينة إلى أخرى، لذا ستكون هذه المؤشرات متغيرات عشوائية لها توزيعات إحصائية خاصة بها.

ويعرف الخطأ المعياري بأنه الانحراف المعياري لهذا المقدر أو المؤشر الإحصائي ويرمز له بالرمز (S.E).

3-1-8 إحصاءة الاختبار (معيار الاختبار) Statistic Test:

لنفرض أن $\left(\hat{\theta}\right)$ مقدر ومؤشر إحصائي للمعلمة (θ) كما أن (θ_0) هي القيمة المعطاة للمعلمة (θ) في فرضية العدم Ho، وأن $S.E\left(\hat{\theta}\right)$ هو الخطأ المعياري للمقدر والمؤشر الإحصائي $\left(\hat{\theta}\right)$، إن معيار الاختبار أو القيمة المحسوبة هو قيمة من قيم المتغير العشوائي (X) وإذا رمزنا لها بالرمز (V) فيمكن حساب قيمة (V) كالآتي:

$$V = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{S.E\left(\hat{\theta}\right)}$$

ويكون لإحصاء الاختبار (V) توزيعاً معيناً يعتمد على توزيع $\left(\hat{\theta}\right)$ علماً أنه إذا كبر حجم العينة $(n \rightarrow \infty)$ فإن المتغير العشوائي (V) سوف يتوزع توزيعاً طبيعياً قياسياً

$$V \sim N(0, 1)$$

3-1-9 درجات الحرية Degrees of Freedom:

تعرف درجات الحرية بأنها حجم العينة (عدد مفرداتها) مطروحاً منه عدد القيود المستقلة المفروضة على هذه العينة، فمثلاً عند تقدير نموذج انحدار خطي بسيط يكون هناك معلمتان في التوزيع هما (b_1,b_0) وعليه ستكون درجات الحرية ($n-2$)، ولتوزيع بواسون معلمة واحدة هي (λ) لذا فإن درجات الحرية تصبح ($n-1$).

ويستفاد من درجات الحرية في تحديد القيمة الجدولية التي تقارن بها قيمة (V) لرفض الفرضية أو قبولها كما هو الحال في استخراج القيمة الجدولية لـ(t) أو لـ(χ^2) أو لـ(F).

3-1-10 المنطقة الحرجة والقيم الحرجة Criticalregion and Critical Values:

تعرف المنطقة الحرجة والواقعة على طرف (أو طرفي) المساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي لمعيار الاختبار (V) بأنها احتمال رفض (Ho) عندما تكون (Ho) صحيحة. أي أنها قيمة مستوى المعنوية (α) في حالة الاختبار من جانب واحد أو $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ للجانب الأيمن و$\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ للجانب الأيسر عندما يكون الاختبار من جانبين.

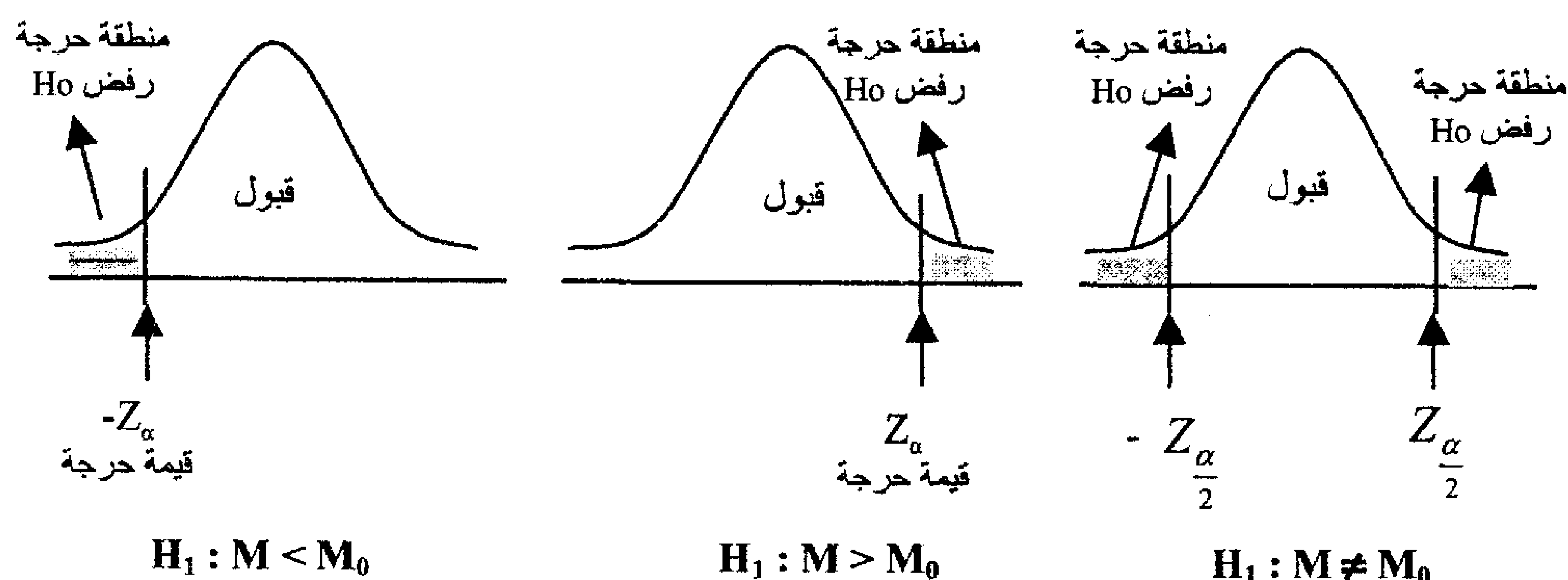
أما القيمة الحرجة والتي هي إحدى قيم التوزيع الاحتمالي لمعيار الاختبار (V) فهي القيمة التي تفصل منطقة الرفض عن منطقة القبول.

ونعتمد في تحديد القيمة الحرجة على مستوى المعنوية والتوزيع الاحتمالي لمعيار الاختبار (V) ودرجات الحرية لبعض التوزيعات كتوزيع (t) والفرضية البديلة التي تحدد فيما لو كان التوزيع من جانب واحد أو من جانبين.

والشكل التالي يوضح المنطقة الحرجة والقيم الحرجة بافتراض أن توزيع معيار الاختبار يخضع للتوزيع الطبيعي القياسي والاختبار حول المتوسط:

شكل (5_3)

يوضح المنطقة الحرجة والقيم الحرجة حسب الفرضية البديلة



ولإجراء أي اختبار ينبغي اتباع الخطوات التالية:

1) تحديد فرضيات البحث الرئيسية هي (H_1 , H_0).

2) تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية والذي ستعتمد على الفرضية البديلة (H_1) في تحديد مناطق الرفض والقبول والقيم الحرجة (الجدولية).

3) نحسب قيمة معيار التوزيع أو إحصاءة الاختبار وحسب نوع الاختبار ونوع التوزيع واعتماداً على فرضية العدم (H_0).

4) نقارن قيمة معيار الاختبار أو إحصاءة الاختبار مع القيم الحرجة ومساحات الرفض فإذا وقعت قيمتها في منطقة الرفض ترفض (H_0) وإذا وقعت في منطقة القبول تقبل (H_0).

أمثلة محلولة

املأ الفراغات التالية:

1) يعتمد اختبار الفرضية على فرضيتين هما .... و ....

الجواب: فرضية العدم والفرضية الصفرية.

2) يرمز للفرضية الصفرية بالرمز .... والفرضية البديلة بالرمز ....

الجواب: Ho ، H_A أو H_1

3) يقتضي اختبار الفرضية رفض أو قبول الفرضية ....

الجواب: فرضية العدم Ho

4) عندما يكون الاختبار من جانبين يكون مستوى المعنوية مساوي إلى ....

الجواب: $\frac{\alpha}{2}$

5) عندما يكون الاختبار من جانب واحد يكون مستوى المعنوية ....

الجواب: α

6) عند رفض فرضية العدم Ho عندما تكون صحيح يكون هذا خطأ من النوع .... ويرمز له بالرمز ....

الجواب: الأول، α

7) عند قبول فرضية العدم Ho عندما تكون غير صحيحة يكون هذا خطأ من النوع .... ويرمز له بالرمز ....

الجواب: الثاني، β

8) درجات الحرية يمثل حجم العينة .... مطروحاً منه عدد .... المستقلة المفروضة على هذه العينة

الجواب: n ، القيود

9) المنطقة الحرجة الواقعة على طرف (أو طرفي) المساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي بأنها احتمال .... عندما تكون صحيح.

الجواب: رفض Ho

أسئلة الفصل الثالث

1) عرف ما يلي:

- فرضية العدم والفرضية البديلة.
- المنطقة الحرجة والقيم الحرجة.
- مستوى المعنوية (الدلالة).
- اختبار من اتجاه واحد.

2) متى يحدث الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني.

3) ما مفهوم (المقدر) أعط مثال على ذلك.

4) ما مفهوم قوة الاختبار وما علاقته بالخطأ من النوع الثاني.

5) وضح مفهوم الخطأ المعياري للمقدر أو المؤشر الإحصائي.

6) وضح معنى درجات الحرية وما ضرورة استخراجها.

7) ما علاقة معيار الاختبار (إحصاءة الاختبار) بالقيم الحرجة والمساحة الحرجة.

الفصل الرابع

اختبارات تتعلق بالمتوسط

(الوسط الحسابي)

الفَصْلُ الرَّابِعُ

اختبارات تتعلق بالمتوسط (الوسط الحسابي)

4-1 مقدمة:

نتناول في هذا الفصل الاختبارات المتعلقة بالمتوسط أو الوسط الحسابي لمجتمع إحصائي معلوم التوزيع بعد سحب عينة (أو أكثر منه وحساب متوسط العينة $\left(\bar{X}\right)$ كمؤشرة أو مقدر لمعلمة المجتمع (M). ومن أهم الاختبارات الخاصة بالمتوسط:

4-2 اختبار لمتوسط واحد لمجتمع طبيعي تباينه (σ^2) معلوم:

في هذه الحالة وعندما يكون تباين المجتمع معلوم فإن معيار أو إحصاءة الاختبار لاختبار الفرضية:

$$H_o : M = M_0$$

حيث أن (M_0) قيمة من قيم المتوسط (M) يراد اعتبارها أساساً للاختبار سيكون هذا المعيار:

$$Z = \frac{\bar{X} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}1)$$

و(Z) هنا تتوزع توزيعاً طبيعياً قياسياً بمتوسط حسابي $(M = 0)$ وتباين $(\sigma^2 = 1)$.

مثال (1.4):

ادعت إحدى شركات إنتاج علب مربى الفاكهة أن الإنتاج لهذه العلب يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط علبة مقداره (100) غرام وبانحراف معياري مقداره (1.23) غم، ولغرض اختبار ادعاء الشركة سحبت عينة بحجم (50) علبة من

إنتاجها فكان متوسط وزن العلبة (99.5) غم، هل تعتقد أن هناك اختلافاً جوهرياً في أوزان العلب المنتجة لهذه الشركة. اختبر مستوى معنوية 5٪.

الحل:

1) فرضيات الاختبار في هذه الحالة:

$H_0 : M = 100\ G$
$H_1 : M \neq 100\ G$

2) المعلومات المتوفرة:

$\sigma = 1.23$ الانحراف المعياري لمجتمع الدراسة معلوم.

$n = 50$ حجم العينة.

$\bar{X} = 99.5$ الوسط الحسابي للعينة

3) وعليه يمكن استخراج معيار الاختبار (القيمة المحسوبة):

$$Z = \frac{99.5 - 100}{1.23/\sqrt{50}} = -2.8744$$

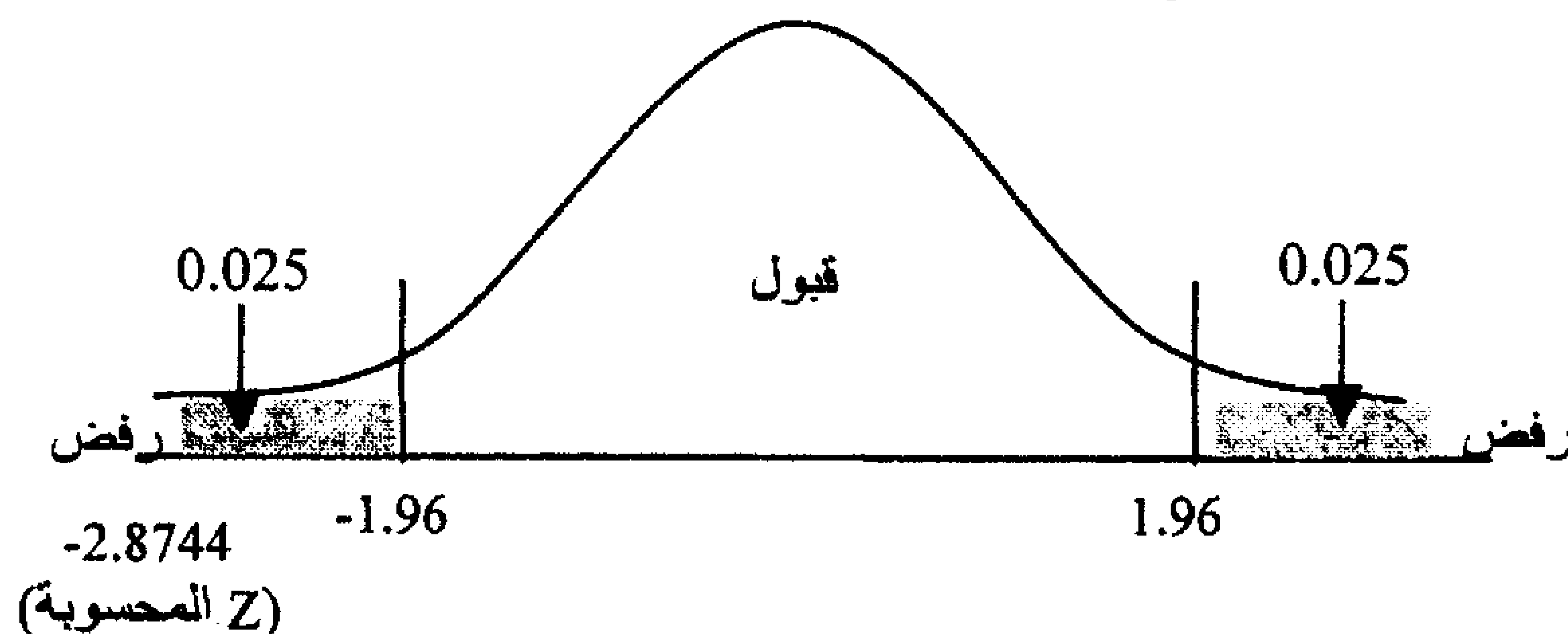
4) نحدد المنطقة الحرجة والقيم الحرجة: من ملاحظة الفرضية البديلة (H_1) فإن الاختبار من جانبين وسوف تقسم (α) على 2 أي نستخرج القيمة الحرجة $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ من جداول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

والشكل التالي يوضح المساحة الحرجة والقيم الحرجة الخاصة بالاختبار:

الشكل (1.4)

يوضح القيم والمساحة الحرجة لمثال (1.4)



5) القرار: لاحظ أن قيمة معيار الاختبار وقعت في منطقة الرفض لأنها أصغر من (-1.96) (لاحظ الشكل 4-1) وعليه ترفض H_0 أي أن هناك اختلافات معنوية في إنتاج هذه الشركة وأن متوسط الإنتاج لا يساوي 100 غم (قبول الفرضية البديلة).

4-3 اختبار لمتوسط واحد لمجتمع طبيعي تباينه (σ^2) غير معلوم وحجم العينة المسحوبة كبير:

في هذه الحالة ورغم أن تباين المجتمع (σ^2) غير معلوم إلا أن حجم العينة عندما يكون كبيراً ($n > 30$) ولأن التوزيع طبيعي يمكن الاستعاضة بقيمة تباين العينة (S^2) بدلاً من تباين المجتمع (σ^2) ويكون معيار أو إحصاءة الاختبار:

$$Z = \frac{\bar{X} - M_0}{S / \sqrt{n}} \qquad \text{..........} \; (4\text{-}2)$$

مثال (2.4):

ادعت شركة مساهمة أن متوسط مبيعاتها اليومي لا يقل عن (4000) دينار ولغرض اختبار هذا الادعاء من قبل المساهمين سحبت عينة من مبيعات الشركة اليومية لعشرة أيام سابقة فكانت كالآتي:

3900، 4100، 3800، 4000، 3800، 4400، 4500، 4600، 4200، 4500.

اختبر الفرضية بمستوى معنوية 1٪.

الحل:

1) معلومات نحتاجها:

$$\bar{X} = \frac{3900 + 4100 + \text{.......} + 4500}{10} = 4180$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = (3900)^2 + (4100)^2 + \text{.......} + (4500)^2$$

$$= 175560000$$

وباستخدام الصيغة التالية لإيجاد S^2:

$$S^2 = \frac{X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{1}{9}\left[175560000 - 10(4180)^2\right]$$

$$S^2 = 92888.889$$

$$S = 304.777$$

2) فرضيات الاختبار هي:

$$H_0 : M \geq 4000$$
$$H_1 : M < 4000$$

3) أما معيار الاختبار:

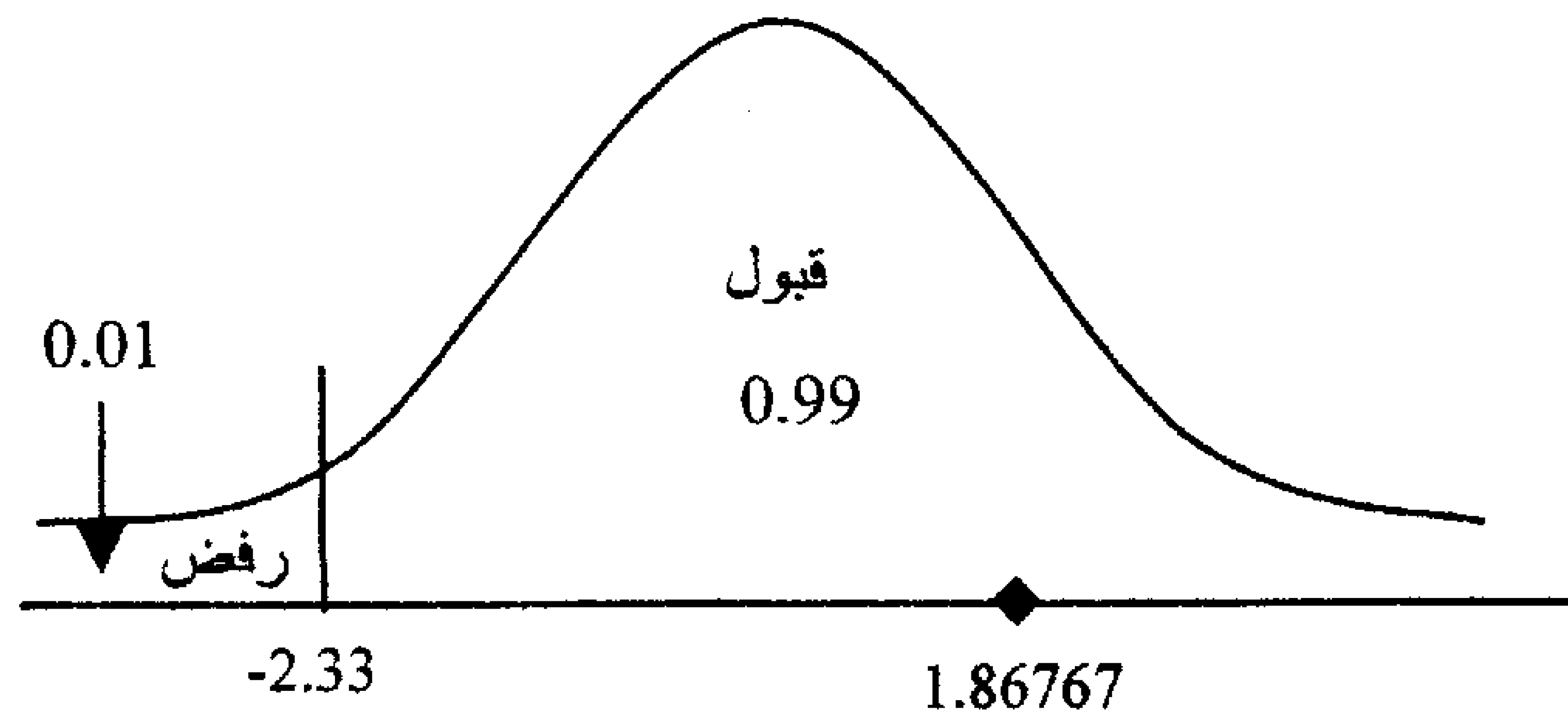
$$Z = \frac{4180 - 4000}{304.777/\sqrt{10}}$$

$$= 1.86767$$

4) بملاحظة الفرضية البديلة فإن الاختبار من جانب واحد

$$Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.33$$

وبذلك فإن المنطقة الحرجة والقيمة الحرجة موضحة بالشكل التالي:



5) القرار: بما أن قيمة معيار الاختبار (Z المحسوبة) وقعت في منطقة القبول لأنها أكبر من 2.33– (لاحظ الشكل أعلاه) نقبل H_0 أي أن متوسط مبيعات الشركة لا تقل عن (4000) دينار يومياً.

4-4 اختبار يتعلق بمتوسط واحد عندما يكون تباين المجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير:

ما دام تباين المجتمع غير معلوم وحجم العينة صغيرة ($n < 30$) فإن الاختبار يخضع لتوزيع (t) (الخاص بحجوم العينة الصغيرة) ويكون معيار أو إحصاءة الاختبار هو:

$$t = \frac{\bar{X} - M_0}{S / \sqrt{n}} \qquad ....\ (4\text{-}3)$$

و(t) هنا يتوزع بتوزيع (t) لدرجات حرية (n-1)، أما القيمة الحرجة (t الجدولية) فستخرج وفق جداول خاصة لتوزيع (t) بمستوى معنوية (α) ودرجة حرية (n-1).

مثال (3.4):

ادعت إحدى الشركات أن متوسط سعر السهم في الشركة خلال الفترة الحالية هو 2 دينار ولغرض اختبار هذا الادعاء سحب عينة عشوائية من سجلات الشركة لتسعة أيام سابقة فكان متوسط سعر السهم للشركة لهذه الأيام هو (1.8) دينار بانحراف معياري مقداره (0.25) دينار.

اختبر مستوى معنوية 5٪ هل هناك فروق جوهرية في سعر السهم لهذه الشركة عن المتوسط.

الحل:

1) فرضيات البحث هي:

$$H_0 : M = 2$$
$$H_1 : M \neq 2$$

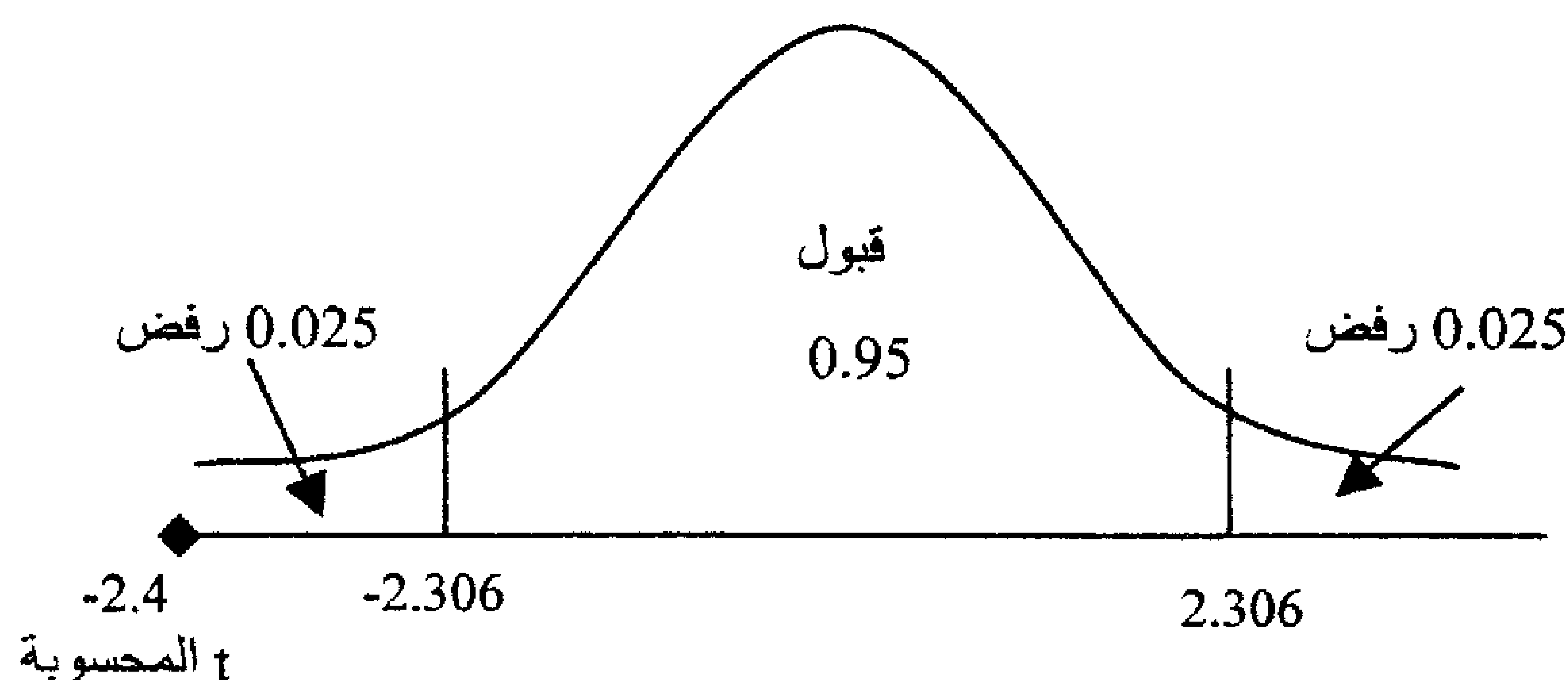
2) نجد معيار الاختبار:

$$t = \frac{1.8 - 2}{0.25 / \sqrt{9}} = -2.4$$

3) نجد t الجدولية من جداول t بمستوى معنوية $\frac{0.05}{2} = 0.025$ ودرجات حرية 8:

$$t_{\frac{\alpha}{2}\ ,\ n-1} = t_{0.25\ ,\ 8} = 2.306$$

4) المنطقة الحرجة والقيم الحرجة يمكن توضيحها بالشكل التالي:



5) القرار: بما أن قيمة t المحسوبة (معيار الاختبار) وقعت في منطقة الرفض (لاحظ الشكل السابق) عليه نرفض H_0 وهذا يعني وجود فروق جوهرية في سعر السهم (قبول H_1) عن المتوسط في سعر السهم.

5-4 اختبارات تتعلق بالفرق بين متوسطين حسابيين لعينتين مستقلتين:

لنفرض أننا سحبنا عينة بحجم (n_1) من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط (M_1)، وتباين (σ_1^2) وكان الوسط الحسابي للعينة $\left(\bar{X}_1\right)$ وأننا سحبنا عينة بحجم (n_2) من مجتمع آخر يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط مساوٍ إلى (M_2) وتباين مساوٍ إلى (σ_1^2) وكان متوسط العينة $\left(\bar{X}_2\right)$.

ولنفرض أننا نختبر فرضية العدم للفرق بين المتوسطين، أي أن:

$$H_0 : M_1 - M_2 = d_0$$

حيث أن (d_0) يمثل الفرق بين متوسطي المجتمعين تحت الاختبار.

1) إذا كان تباين المجتمعين $\left(\sigma_1^2,\sigma_2^2\right)$ معلومين فإن معيار أو إحصاءة الاختبار الملائمة هي:

$$Z=\frac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad \text{..........}\ (4\text{-}4)$$

مثال (4.4):

ادعت إحدى الشركات الوطنية لإنتاج البطاريات الجافة أن إنتاجها لا يختلف عن الإنتاج الأجنبي، ولاختبار هذا الادعاء سحبت عينة بحجم (60) بطارية من الإنتاج الوطني كان متوسط عمر البطارية (1500) ساعة وسحبت عينة أخرى بحجم (65) بطارية من الإنتاج الأجنبي فكان متوسط عمر البطارية (1450) ساعة فإذا كان الانحراف المعياري للإنتاج الوطني $(\sigma_1 = 40)$ وللإنتاج الأجنبي $(\sigma_2 = 30)$:

أ) هل تعتقد أن ادعاء الشركة صحيح. اختبر بمستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$.

ب) إذا كان هناك اختلافاً في الإنتاج أي منتج أكبر عمراً؟

الحل:

أ) 1) فرضيات البحث هي:

$$H_0 : M_1 - M_2 = 0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 \neq 0$$

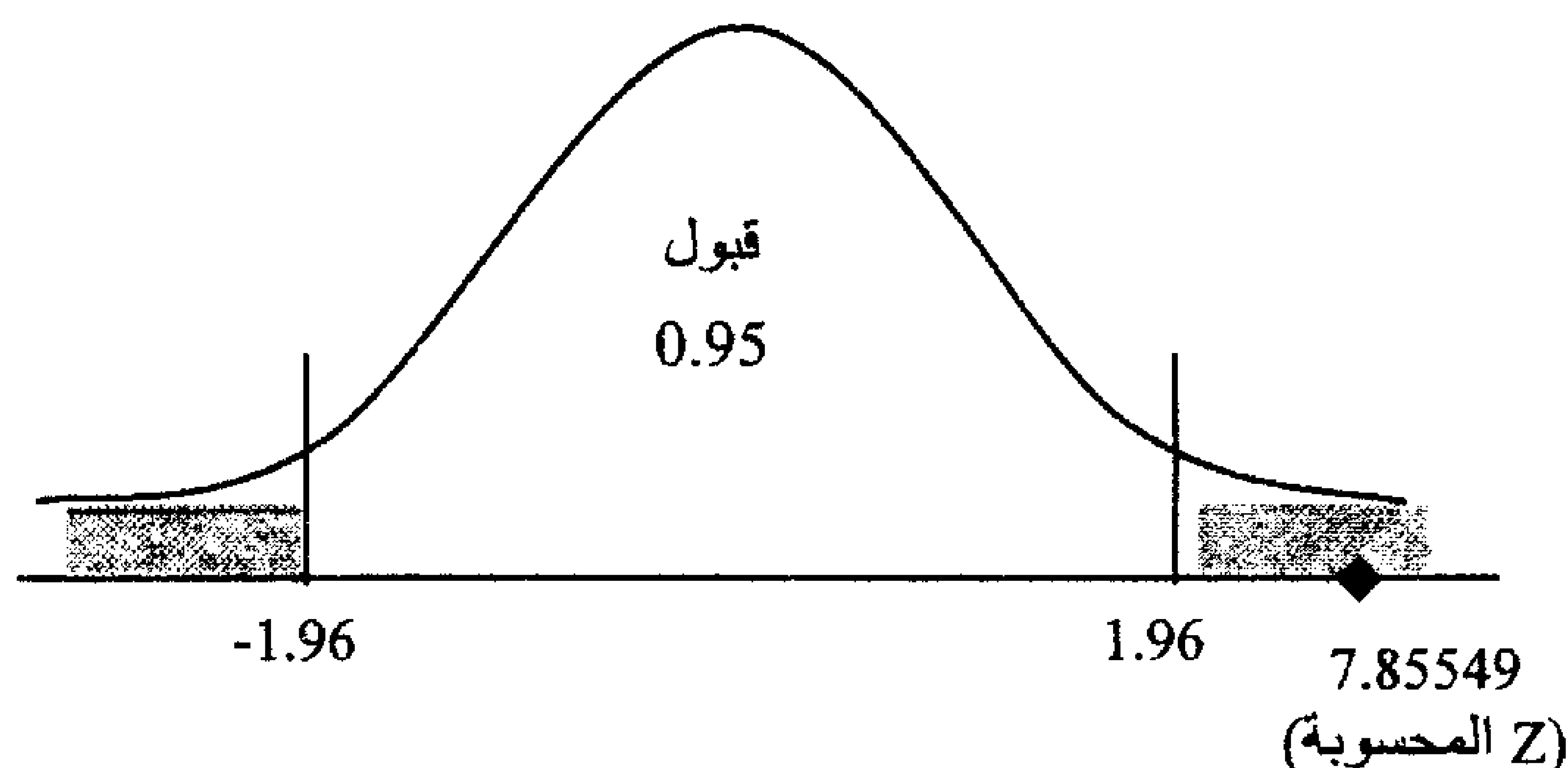
2) معيار أو إحصاء الاختبار:

$$Z=\frac{1500-1450}{\sqrt{\frac{40^2}{60}+\frac{30^2}{65}}}=7.85549$$

3) لإيجاد المنطقة الحرجة والنقاط الحرجة نستخرج (Z) الجدولية:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.025}=1.96$$

وعليه فإن الشكل التالي يوضح المنطقة والنقاط الحرجة:



4) القرار: بما أن قيمة (Z) المحسوبة (معيار أو إحصاءة الاختبار) وقعت في منطقة الرفض (لاحظ الشكل السابق) نرفض (H_0) أي أنه يوجد اختلاف معنوي في متوسط الإنتاج الأجنبي عن الوطني.

ب) للإجابة على هذا التساؤل لنفرض أننا نختبر الفرضية التالية والقائلة أن متوسط الإنتاج الوطني مساوٍ أو أكبر من متوسط الإنتاج الأجنبي:

$$H_0 : M_1 - M_2 \geq 0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 < 0$$

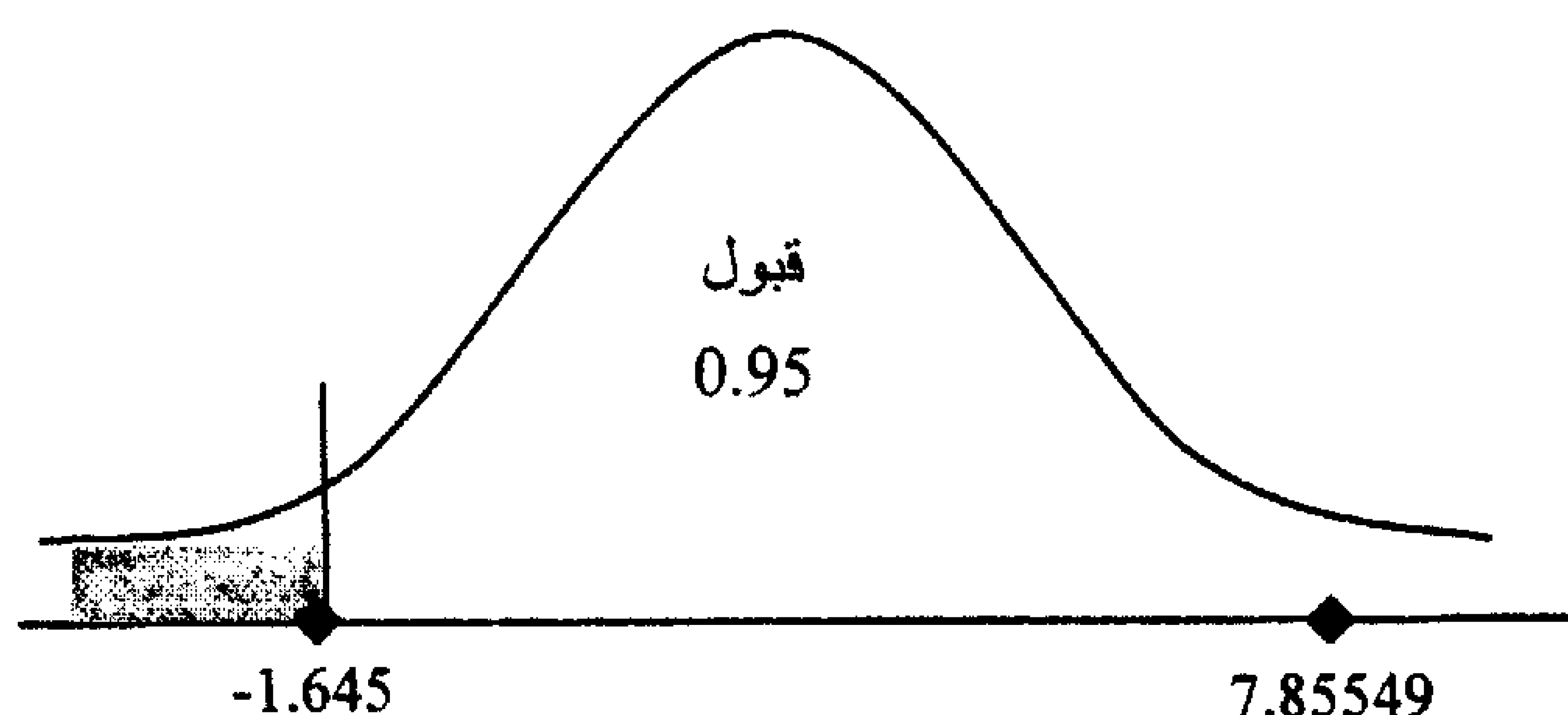
❖ معيار أو إحصاءة الاختبار لا تختلف

$$Z = 7.85549$$

❖ استناداً للفرضية البديلة ولتحديد المساحة الحرجة والنقاط الحرجة نستخرج (Z) الجدولية لمستوى معنوية 0.05

$$Z_{0.05} = 1.645$$

فيكون الشكل التالي توضيحاً للنقاط والمساحة الحرجة:



ومن ملاحظة قيمة (Z) المحسوبة نجد أنها تقع في منطقة القبول، لذا تقبل فرضية العدم وأن متوسط الإنتاج الوطني مساوي أو أكبر من متوسط الإنتاج الأجنبي.

2) إذا كان تباين المجتمعين $\left(\sigma_2^2, \sigma_1^2\right)$ غير معلومين وحجم العينتين المسحوبتين كبيران أي أن $(n_1 \ , \ n_2 > 30)$ فيمكن الاستعاضة عن تباين كل مجتمع بتباين العينة المسحوبة منه فتصبح معيار أو إحصاءة الاختبار:

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad \ldots\ldots\ldots (4\text{-}5)$$

مثال (5.4):

في دراسة مستوى الأداء في امتحان لمهارات اللغة بين جامعة (A) وجامعة (B) سحبت عينة بحجم (50) طالب من جامعة (A) وجد أن متوسط علامتهم في الامتحان (70) بانحراف معياري مقداره (3) وسحبت عينة بحجم (60) من جامعة (B) فوجد أن متوسط علاماتهم (65) بانحراف معياري مقداره 5.

هل تعتقد أن هناك اختلافات جوهرية بين أداء الطلبة في الجامعتين؟ اختبر بمستوى 0.01.

الحل:

1) فرضيات البحث:

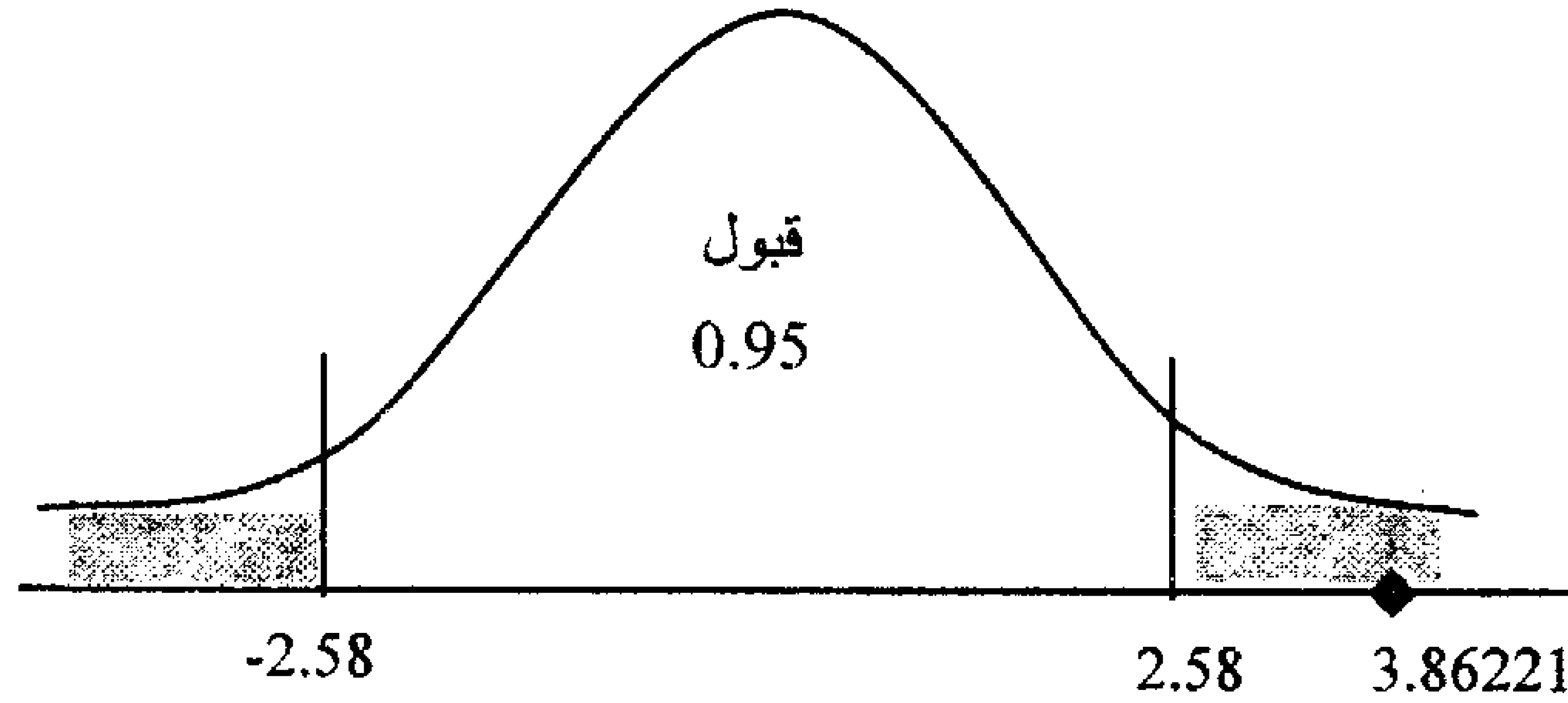
$$H_0 : M_1 - M_2 = 0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 \neq 0$$

2) معيار أو إحصاءة الاختبار:

$$Z = \frac{(70 - 65) - 0}{\sqrt{\frac{3^2}{50} + \frac{5^2}{60}}} = 3.86221$$

3) (Z) الجدولية استناداً إلى الفرضية البديلة:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.01}{2}} = Z_{0.005} = 2.58$$



4) بما أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة الرفض (لاحظ الشكل السابق) نرفض H_0، أي أن هناك اختلافاً جوهرياً في أداء الطلبة للجامعتين.

....

3) إذا كان تباين المجتمعين $\left(\sigma_2^2, \sigma_1^2\right)$ غير معلومين وحجم العينتين المسحوبتين من مجتمعين مستقلين صغيراً $(n_1 \; , \; n_2 \; < \; 30)$ فإن توزيع معيار أو إحصاءة الاختبار يخضع لتوزيع (t).

وإذا افترضنا أن تباين المجتمعين متساويين (وغير معلومين) أي أننا نفترض أن المجتمعين متجانسين فإن معيار أو إحصاءة الاختبار ستكون:

$$t = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - d_0}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad .... (4\text{-}6)$$

حيث أن:

$$S_P = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \qquad .... (4\text{-}7)$$

وأن $\left(S_2^2, S_1^2\right)$ هما تباين العينتين المسحوبتان من المجتمعين. وتقارن قيمة (t) المحسوبة مع (t) الجدولية بمستوى معنوية معلوم ودرجات حرية $(n_1 + n_2 - 2)$.

مثال (6.4):

لدراسة مستوى الإنفاق العائلي على الرعاية الصحية في إحدى البلدان سحبت عينة بحجم (18) عائلة من محافظة العاصمة فوجد أن متوسط إنفاقها شهرياً على الرعاية الصحية (100) دينار بانحراف معياري مقداره (15) دينار، وسحبت عينة أخرى من محافظة ثانية بحجم (14) عائلة فوجد أن متوسط إنفاقها على الرعاية الصحية (60) دينار بانحراف معياري مقداره (10) دينار. هل تعتقد أن هناك فروقات معنوية بين متوسط إنفاق العائلة على الرعاية الصحية في محافظة العاصمة عن المحافظة الأخرى. اختبر مستوى معنوية 5٪.

الحل:

على افتراض تساوي التباين لمجتمعي العاصمة والمحافظة الأخرى متساويين $\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$ فإن:

1) فرضيات البحث:

$$H_0 : M_1 - M_2 = 0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 \neq 0$$

2) لإيجاد معيار أو إحصاءة الاختبار:

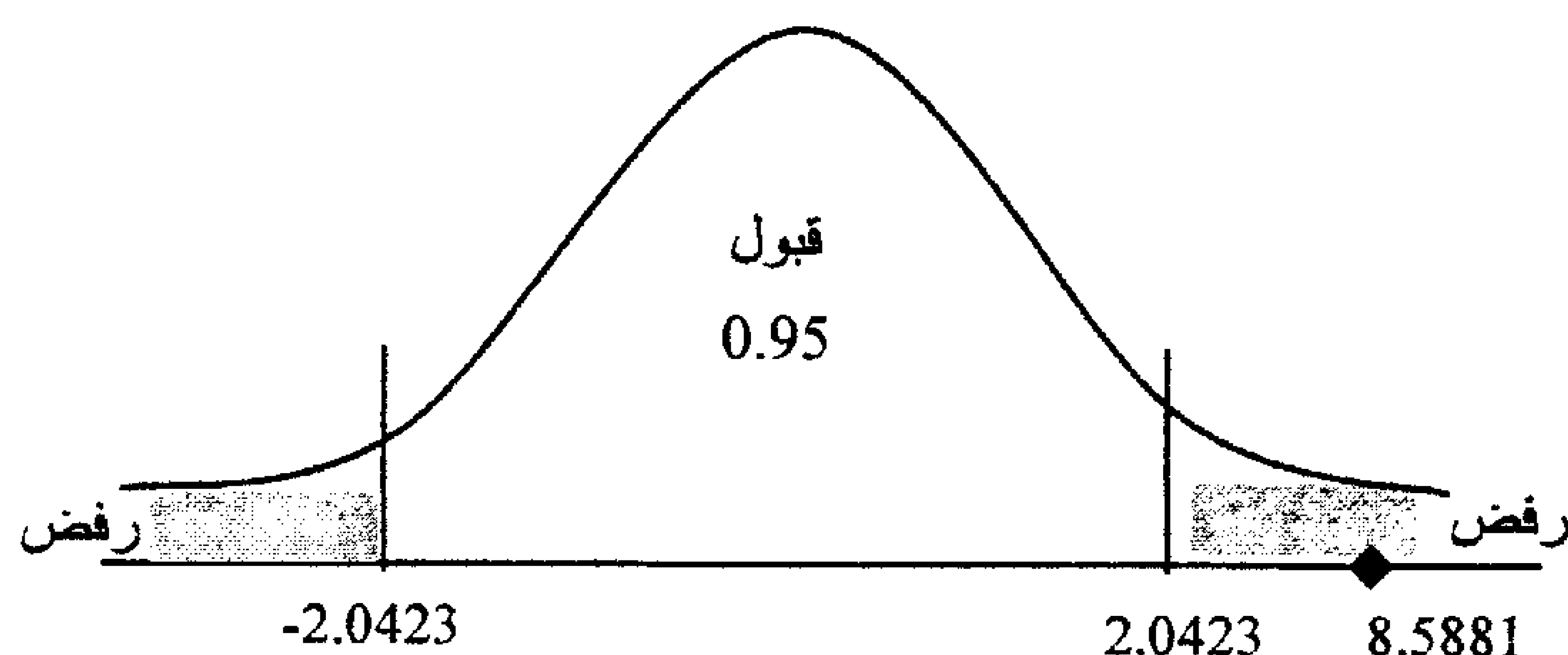
$$S_P = \sqrt{\frac{(18-1)(15)^2 + (14-1)(10)^2}{18+14-2}} = 13.070322$$

$$t = \frac{(100-60)-0}{13.070322\sqrt{\frac{1}{18}+\frac{1}{14}}} = 8.588137$$

3) لإيجاد المساحة الحرجة والنقاط الحرجة واستناداً إلى الفرضية البديلة:

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} = t_{0.025/30} = 2.0423$$

وبذلك فإن المنطقة الحرجة والقيم الحرجة يوضحها الشكل التالي:



4) القرار بما أن قيمة (t) المحسوبة وقعت في منطقة الرفض (لاحظ الشكل السابق)، نرفض (H_0) أي أن متوسط الإنفاق غير متساوي في محافظة العاصمة وهذه المحافظة.

4-6 اختبار يتعلق بالفرق بين متوسطين حسابيين لعينتين غير مستقلتين:

يستخدم هذا الاختبار عندما يتم الاختبار لمشاهدات تعطي أكثر من قراءة واحدة، أي أننا نسحب عينتين لكل عينة معلومات من نفس المشاهدات، لذا تصبح هاتين العينتين غير مستقلتين. ومثال على ذلك عندما يراد المقارنة بين حالة المريض قبل إعطاءه الدواء وبعد إعطاءه الدواء لقياس تأثير وفعالية الدواء ستكون القراءات أو المعلومات المسجلة للمرضى قبل الدواء تمثل العينة الأولى، والقراءات المسجلة لنفس المرضى بعد أخذ الدواء تمثل معلومات العينة الثانية.

أما فرضيات الاختبار الأساسية (H_0) فتكون بالشكل التالي:

$$H_0 = M_1 - M_2 = 0$$

$$\text{or} \quad H_0 : d = 0$$

ومعيار أو إحصاءة الاختبارة هي:

$$t = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \qquad \text{..........} \ (4\text{-}8)$$

حيث أن:

$d_i = X_{i1} - X_{i2}$ الفرق بين قياسات المفردة (i) من العينة الأولى ونفس المفردة من العينة الثانية ($i = 1, \ldots\ldots, n$).

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i-1}^{n} di}{n} \qquad \text{.......... (4-9)}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum d_i^2 - n\bar{d}^2\right]} \qquad \text{.......... (4-10)}$$

وتقارن قيمة معيار الاختبار (t المحسوبة) مع قيمة (t) الجدولية بمستوى معنوية محدد ودرجات حرية (n - 1).

مثال (7.4):

تم إجراء امتحان لعشرة طلبة في مادة مهارات الحاسوب، وسجلت علاماتهم ثم أدخلوا دورة لمدة شهر واحد وتم إجراء امتحان ثاني لهم بعد انتهاء الدورة، والبيانات التالية تمثل نتائج الامتحانين. اختبر أثر الدورة في تحسين أدائهم عند مستوى معنوية (0.01).

الحل:

فرضية البحث المناسبة:

$H_0 : M_1 - M_2 \geq 0$ or $d \geq 0$

$H_1 : M_1 - M_2 < 0$ or $d < 0$

X_{i1} درجة الطالب قبل الدورة	X_{i2} درجة الطالب بعد الدورة	di	di^2
6	8	-2	4
5	7	-2	4
1	6	-5	25
4	7	-3	9
3	8	-5	25
1	6	-5	25
5	8	-3	9
4	9	-5	25
3	8	-5	25
8	9	-1	1
40	76	-36	152

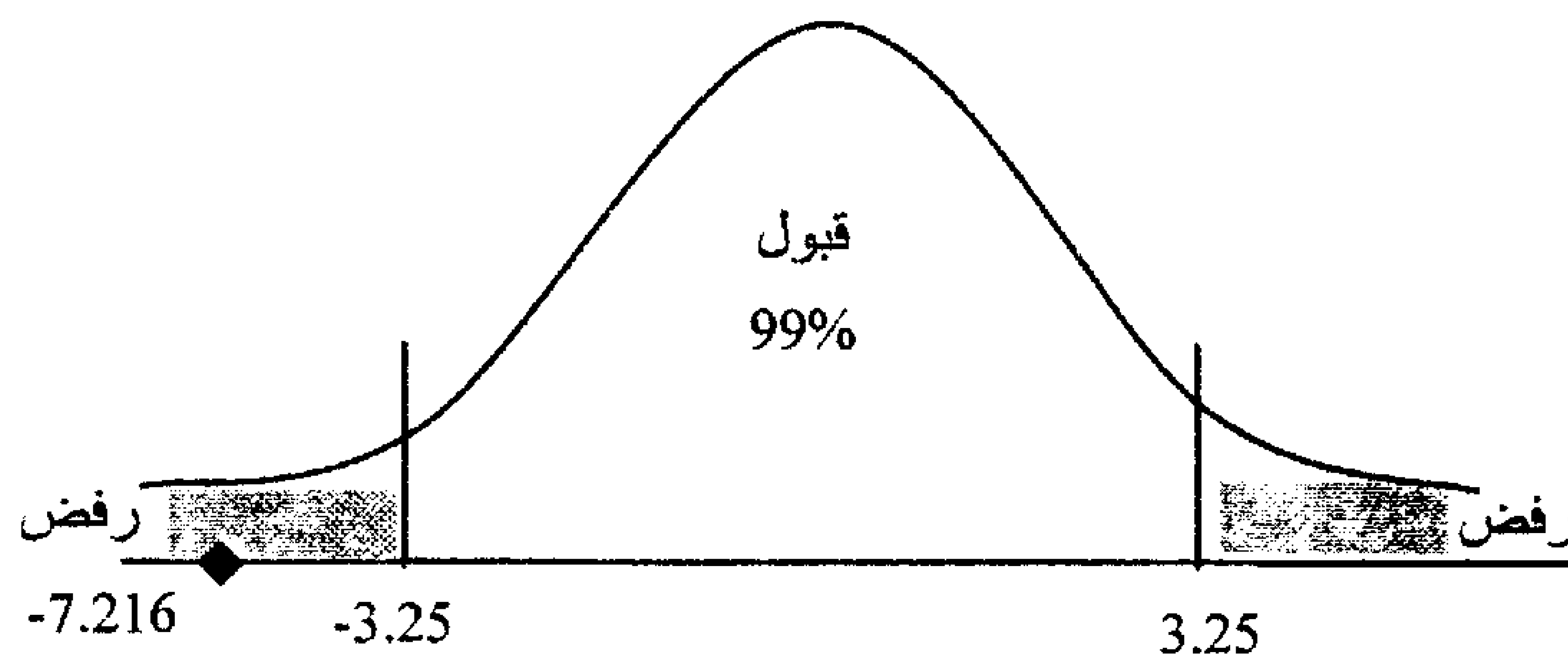
$$\bar{d} = \frac{-36}{10} = -3.6 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{d}^2 = 12.96$$

$$S_d = \sqrt{\frac{1}{9}[152 - 10(12.96)]} = 1.5776$$

$$t = \frac{-3.6}{1.5776/\sqrt{10}} = -7.216$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0.005,9} = 3.250$$

وبذلك فإن المنطقة والقيم الحرجة موضحة بالشكل التالي:



القرار: لوقوع قيمة معيار الاختبار (t المحسوبة) في منطقة الرفض (لاحظ الشكل السابق) نرفض (H_0) أي أننا نقبل (H_1) وهذا يعني أن للدورة تأثير واضح على تحسين أداء الطلبة.

أمثلة محلولة

مثال (8.4):

ادعت أحد الشركات أن متوسط الأجور لعامليها يتبع توزيع طبيعي بمتوسط شهري لا يقل عن (200) دينار وبانحراف معياره مقداره (12) دينار ولاختبار ادعاء الشركة سحبت عينة بحجم (64) عامل فكان متوسط أجورهم (195) دينار، اختبر ادعاء الشركة بمستوى معنوية مقداره 1٪.

الحل:

❖ فرضيات الاختبار:

$$Ho : M \geq 200$$
$$H_1 : M < 200$$

❖ المعلومات المتوفرة:

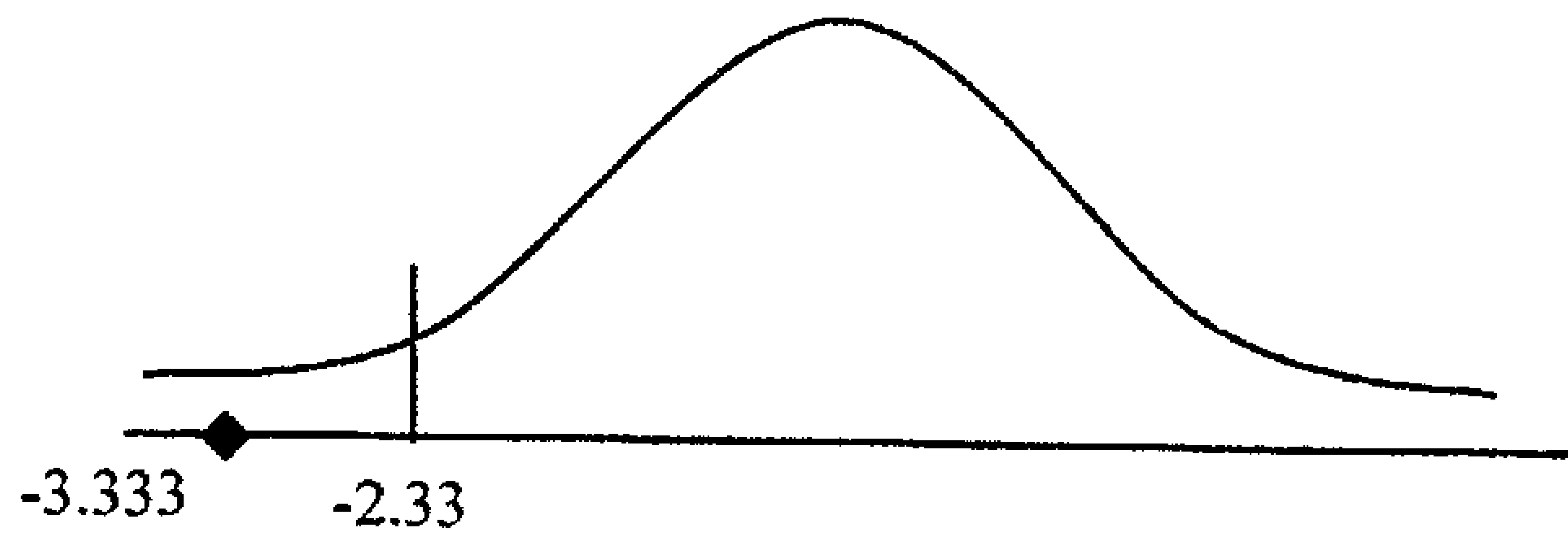
$\overline{X} = 195$ $\quad n = 64$ $\quad \sigma = 12$

❖ معيار الاختبار (إحصاءة الاختبار) أي Z المحسوبة:

$$Z = \frac{195-200}{12/\sqrt{64}} = \frac{-5}{12/8} = \frac{-40}{12} = -3.333$$

❖ المنطقة الحرجة والقيم الحرجة هي:

$$Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.33$$



❖ **القرار:** نظراً لوقوع قيمة Z المحسوبة في منطقة الرفض (لاحظ الشكل أعلاه) نرفض Ho وأن متوسط الأجور يقل عن (200) دينار.

مثال (9.4):

اعتادت أحد شركات إنتاج الشاي أن يكون متوسط وزن الكيس (250) غم ولغرض التأكد من أن الإنتاج على طبيعته القياسية سحبت عينة من إنتاج هذا اليوم بحجم (50) كيس فكان متوسط وزن الكيس (251) بانحراف معياري مقداره (3) غم. هل تعتقد أن الإنتاج ما زال على وضعه القياسي المعتاد؟ اختبر بمستوى معنوية 0.05.

الحل:

$$Ho : M = 250$$
$$H_1 : M \neq 250$$

❖ المعلومات المتوفرة:

n = 50 حجم العينة كبير ويقترب من التوزيع الطبيعي

$\overline{X} = 250$

$S = 3$

بما أن حجم العينة كبير لذا يمكن الاستعاضة عن الانحراف المعياري للمجتمع (σ) بالانحراف المعياري للعينة (S).

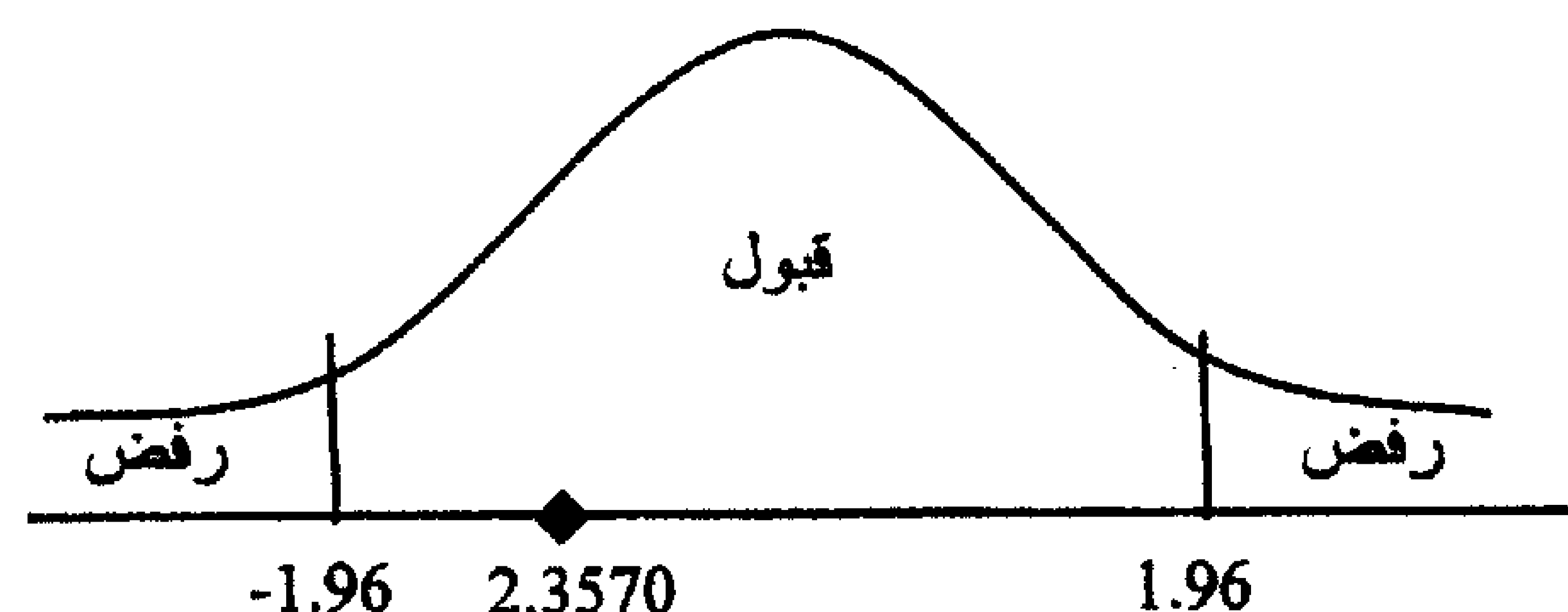
❖ نجد قيمة Z المحسوبة التي تمثل معيار الاختبار:

$$Z = \frac{251 - 250}{3/\sqrt{50}} = 2.35702$$

❖ نجد Z الجدولية:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

❖ نحدد المنطقة الحرجة والقيم الحرجة:



❖ بما أن Z المحسوبة وقعت في منطقة القبول تقبل Ho أي أن الشركة ما زالت تنتج أكياس الشاي بمتوسط مقداره (250) غم.

مثال (10.4):

ادعت إحدى شركات إنتاج علب الحليب الطازج أن متوسط وزن العلبة (1000) غم ولغرض اختبار هذا الادعاء سحبت (16) علبة من الإنتاج اليومي للشركة فكان متوسط وزن العلبة (990) غم بانحراف معياري مقداره (10) غم اختبر ادعاء الشركة بمستوى معنوية 0.05.

الحل:

❖ فرضيات البحث هي:

$$Ho : M = 1000$$
$$H_1 : M \neq 1000$$

❖ المعلومات المتوفرة:

$$n = 16$$
$$\overline{X} = 900$$
$$S = 10$$

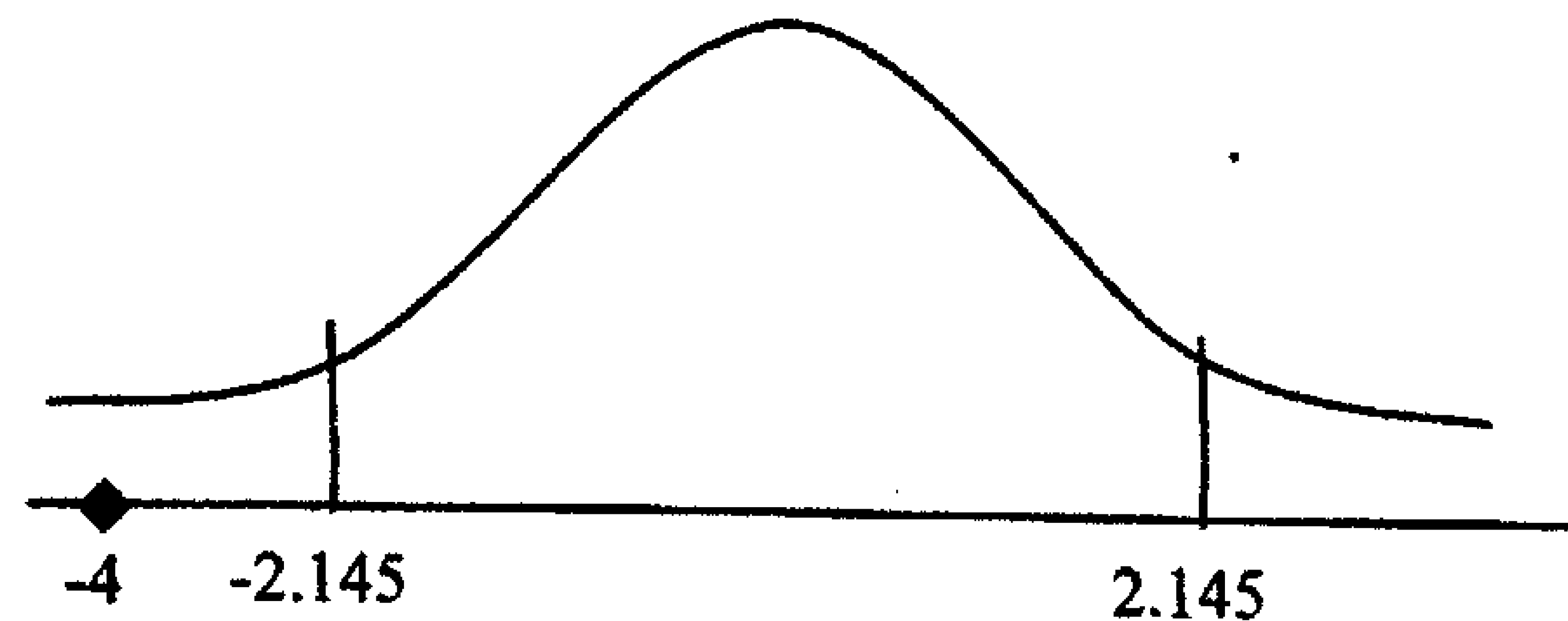
❖ معيار الاختبار:

$$t = \frac{990 - 100}{10/\sqrt{16}} = -4$$

❖ نجد t الجدولية:

$$t_{\frac{\alpha}{2}/n-1} = t_{0.025/15} = 2.145$$

❖ المناطق الحرجة والقيم الحرجة موضحة بالرسم:



❖ القرار: بما أن قيمة t المحسوبة وضعت في منطقة الرفض (لاحظ الرسم) نرفض Ho أي أن المتوسط لا يساوي 1000 غم.

مثال (11.4):

لقياس الاختلافات في إنتاج معملين ينتجان نفس البضاعة قامت الشركة بسحب عينة بحجم (50) منتج من المعمل الأول وكان متوسط وزن المنتج (250) غم وسحبت عينة أخرى من المعمل الثاني بحجم (50) منتج فكان متوسط المنتج (248) غم فإذا كانت الشركة قد حددت التباين المسموح بالإنتاج (25) غم اختبر هل هناك اختلافاً في متوسط الإنتاج بمستوى معنوية 0.05.

الحل:

❖ فرضيات البحث:

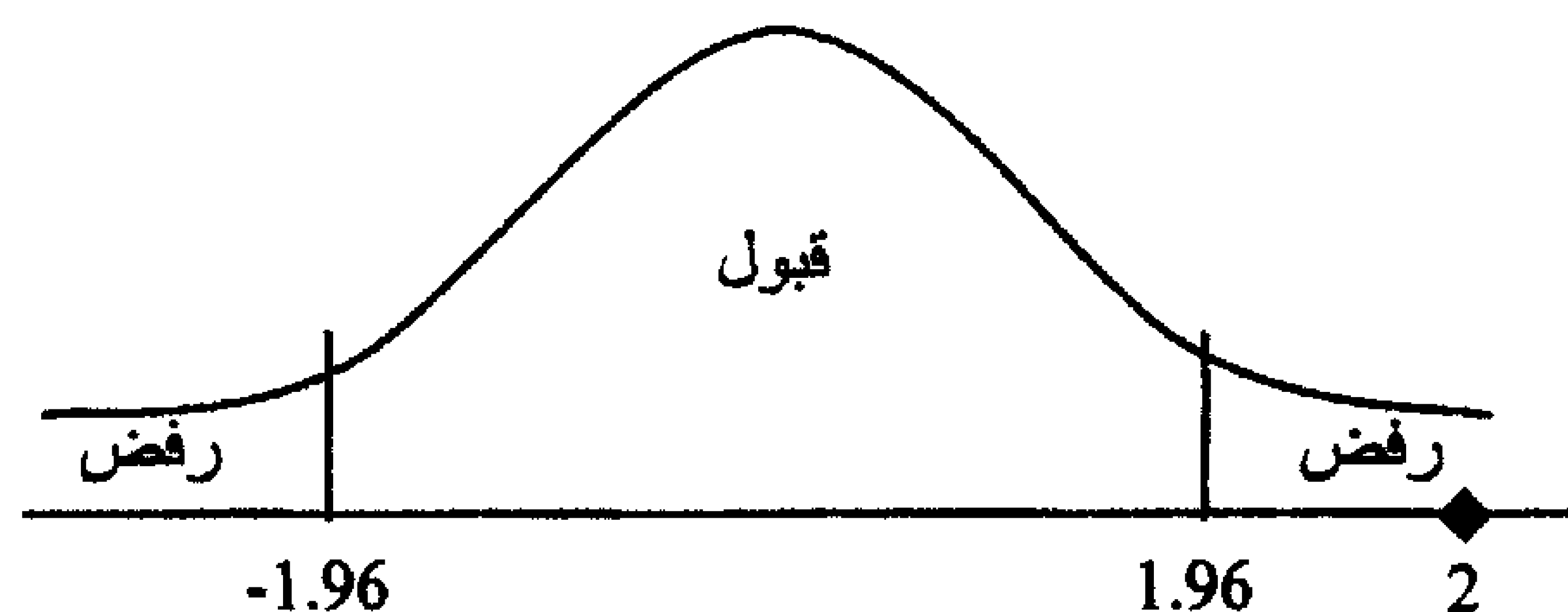
$$Ho : M_1 - M_2 = 0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 \neq 0$$

❖ معيار أو إحصاءة الاختبار:

$$Z = \frac{250 - 248}{\sqrt{\frac{25}{50} + \frac{25}{50}}} = 2$$

❖ نجد القيم الحرجة والمنطقة الحرجة:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$



❖ القرار: بما أن قيمة Z المحسوبة وقعت في منطقة الرفض (لاحظ الشكل) نرفض Ho أي أن هناك اختلافاً في متوسط الإنتاج لكلا المصنعين.

مثال (12.4):

لدراسة واقع الإنتاج في المعمل للسنة الحالية والسنة التي تسبقها سحبت عينة من سجلات المعمل للإنتاج اليومي بحجم (22) يوم للسنة الماضية فكان متوسط الإنتاج اليومي (50) وحدة بانحراف معياري مقداره (2) وحدة ومن سجلات هذه السنة سحبت عينة بحجم (20) يوم فكان متوسط الإنتاج اليومي (48) وحدة بانحراف معياري مقداره (3) وحدة هل تعتقد أن هناك اختلافاً في متوسط الإنتاج للسنة الحالية عن السنة الماضي اختبر بمستوى معنوية 0.05.

الحل:

❖ فرضيات البحث:

$$Ho : M_1 - M_2 = 0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 \neq 0$$

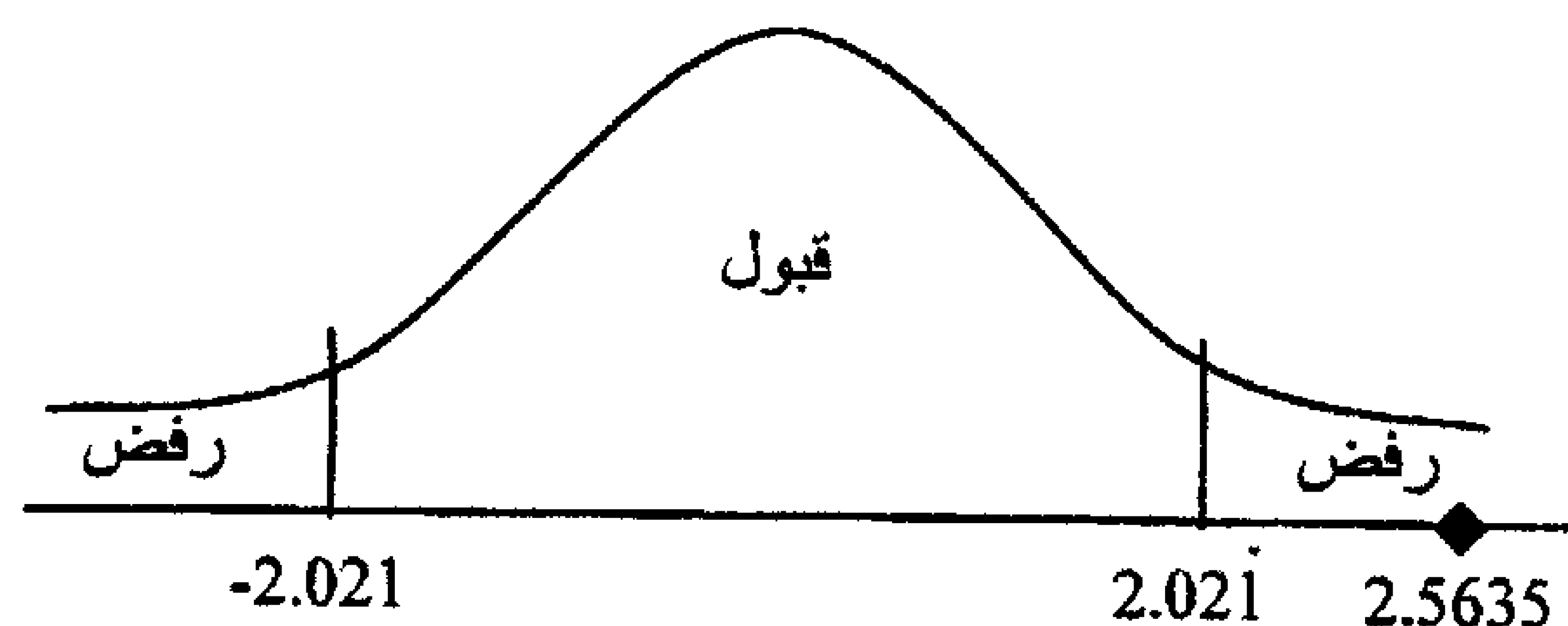
❖ نجد معيار الاختبار:

$$Sp = \sqrt{\frac{(22-1)(2^2)+(20-1)(3^2)}{22+20-2}} = \sqrt{6.375} = 2.525$$

$$t = \frac{50-48}{2.525\sqrt{\frac{1}{22}+\frac{1}{20}}} = 2.5637$$

❖ نجد النقاط الحرجة والمساحات الحرجة:

$$t_{\frac{\alpha}{2}/n1+m2-2} = t_{0.025/40} = 2.011$$



❖ القرار: بما أن قيمة t المحسوبة وقعت في منطقة الرفض (لاحظ الشكل أعلاه) نرفض Ho أي أن واقع الإنتاج في السنة الحالية يختلف عن السنة الماضية.

مثال (13.4):

لغرض تقليل حالات التوقف في الخط الإنتاجي تم معالجة مكائن الخط العشرة بنوع خاص في الزيوت وسجلت حالات التوقفات الرمزية لكل ماكنة فكانت كالآتي:

الماكنة	عدد التوقفات قبل المعالجة	عدد التوقفات بعد المعالجة
1	5	4
2	6	4
3	4	3
4	5	3
5	8	5
6	3	2
7	2	1
8	6	5
99	4	3
10	2	0

اختبر أثر المعالجة في تحسين أداء المكائن؟

الحل:

X_{i1}	X_{i2}	di	di^2
5	4	1	1
6	4	2	4
4	3	1	1
5	3	2	4
8	5	3	9
3	2	1	1
2	1	1	1
6	5	1	1
4	3	1	1
2	0	2	4
		15	27

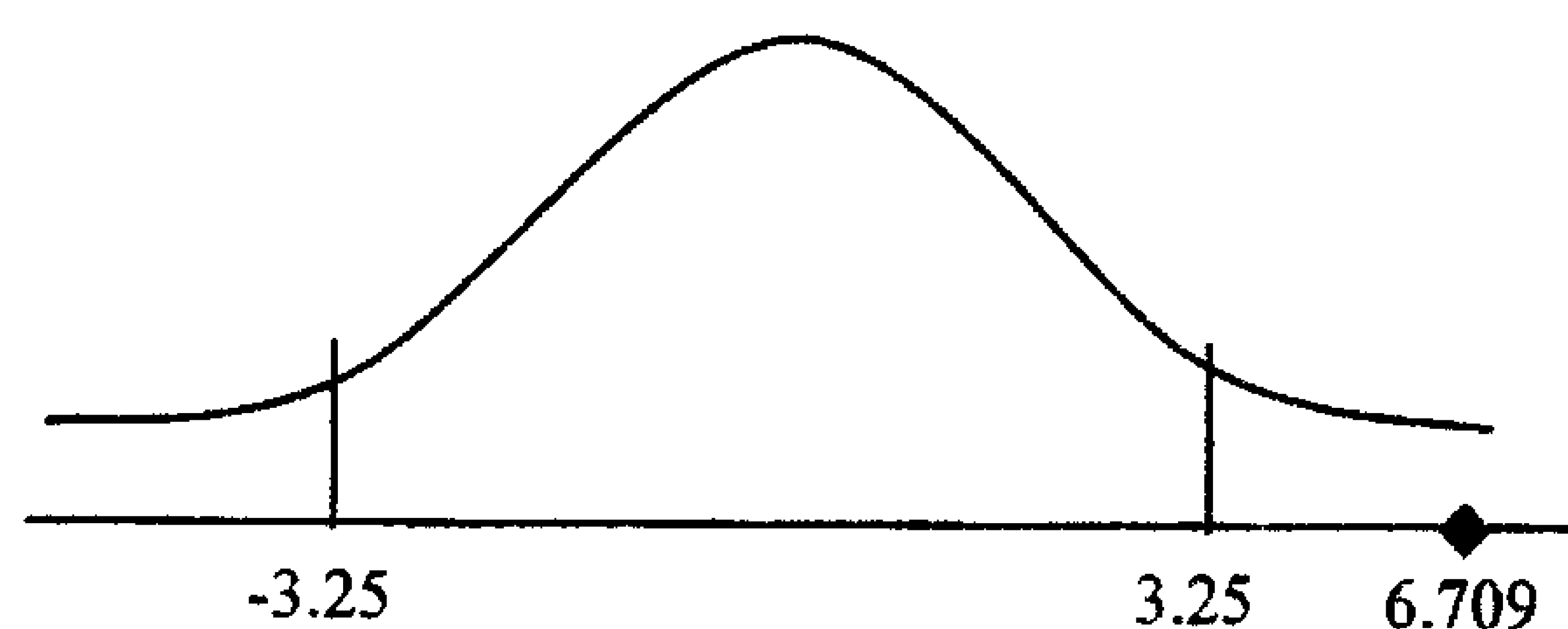
$$\overline{d} = \frac{15}{10} 1.5$$

$$S_d = \sqrt{\frac{1}{9}\left[27 - 10(1.5)^2\right]} = 0.707$$

$$t = \frac{1.5}{0.707/\sqrt{10}} = 6.709$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}/n-1} = t_{0.005/9} = 3.250$$

❖ نحدد النقاط والمساحات الحرجة:



❖ بما أن قيمة t المحسوبة وقعت في منطقة الرفض نرفض Ho أي أن متوسط التوقفات في الماكنة قد اختلفت بعد معالجتها.

أسئلة الفصل الرابع

1) ادعت إحدى شركات إنتاج المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصباح (1000) ساعة بانحراف معياري مقداره (3) ساعة ولاختبار ادعاء الشركة سحبت عينة بحجم (70) مصباح فوجد أن متوسط عمر المصباح (900) ساعة هل تعتقد أن ادعاء الشركة صحيح، اختبر بمستوى معنوية 5٪.
2) أراد مدير الشركة شراء مكائن لاستحداث خط إنتاجي جديد فتقدم عرض للشركة ادعت فيه أن الماكنة تنتج ما لا يقل عن (100) قدح بلاستيكي بالمتوسط خلال الساعة. ولغرض اختبار هذه المعلومات، تم تشغيل الماكنة لمدة (20) ساعة فكان متوسط عدد الأقداح المنتجة خلال الساعة (99) قدح بانحراف معياري مقداره (3) قدح هل تعتقد أن ادعاء الشركة صحيح اختبر بمستوى معنوية 1٪.
3) لدراسة إنجاز المعاملات الضريبية في فرعين من فروع الضريبة سحبت عينة بحجم (50) يوم من سجلات الفرع الأول فوجد أن متوسط عدد المعاملات المنجزة (15) معاملة ومن سجلات الفرع الثانية سحبت عينة بحجم (70) يوم فكان متوسط عدد المعاملات المنجزة (18) معاملة فإذا كانت دائرة الضريبة قد حددت التباين المسموح في عدد المعاملات المنجزة لكل فرع بـ(3) معاملة. اختبر هل هناك اختلافاً في عدد المعاملات المنجزة لكلا الفرعين.
4)لدراسة واقع مبيعات المنتج لمعملين ينتجان نفس المنتج لشركة ما سحبت عينة بحجم (20) يوم من المعمل الأول فكان متوسط المبيعات (50) وحدة يومياً بانحراف معياري مقداره (2) وحدة وسحبت عينة بحجم (2) يوم من المعمل الثاني فكان متوسط المبيعات (60) وحدة يومياً بانحراف معياري مقداره

(30) وحدة هل تعتقد أن هناك اختلافاً في مبيعات المنتج لكلا المعملين اختبر بمستوى معنوية 0.01.

5) سجلت مبيعات منافذ البيع لإحدى شركات الاتصالات في بطاقات الشحن في أول الشهر وفي منتصفه فكانت كالآتي:

البيع منتصف الشهر	البيع أول الشهر	منافذ البيع
50	100	1
150	200	2
100	150	3
100	120	4
80	130	5
120	140	6
100	110	7
100	100	8
200	250	9
100	120	10

هل تعتقد أن مبيعات أول الشهر تختلف عن مبيعات آخر الشهر، اختبر بمستوى معنوية 0.05.

الفصل الخامس

اختبار يتعلق بأكثر من متوسطين

الفصل الخامس

اختبار يتعلق بأكثر من متوسطين

5-1 تحليل التباين:

عندما نريد اختبار تساوي أكثر من متوسطين أي اختبار الفرضية

$H_0 : M_1 = M_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = M_k$

مقابل الفرضية

H_1 : على الأقل واحد من المتوسطات مختلف عن البقية

فإننا نلجأ إلى تحليل التباين والذي يستند إلى تجزئة مجموع المربعات الكلي (Total sum of squre) لجميع قيم المشاهدات إلى قسمين أو أكثر يمثل إحداها مجموع المربعات داخل كل مجموعة أو عينة، وتمثل الأخرى مجموع المربعات بين المجموعات (الذي يمكن أن يقسم بدوره إلى أكثر من قسم)، ثم بعد ذلك نستخرج معيار أو إحصاءة الاختبار (F) والتي هي عبارة عن حاصر قسمة متوسط المربعات بين المجموعات على متوسط المربعات داخل المجموعات.

وتلخص هذه العمليات في جدول يسمى جدول تحليل التباين (ANOVA) وتقارن قيمة (F) المحسوبة وفق هذا الجدول مع قيمة (F) الجدولية بمستوى معنوية محدد ودرجة حرية (بين المجاميع أو العينات) للبسط ودرجة حرية (داخل المجموعات أو العينات) للمقام.

فإذا كانت قيمة (F) المحسوبة أكبر أو تساوي قيمة (F) الجدولية ترفض فرضية العدم (H_0) وهذا يعني وجود اختلافات أو فروق جوهرية بين المجموعات بشكل عام، وإذا كانت قيمة (F) المحسوبة أقل من قيمة (F) الجدولية تقبل (H_0) أي أن المتوسطات متساوية ولا توجد فروق جوهرية بين متوسطات المجموعات أو العينات تحت الاختبار.

2-5 اختبار يتعلق بأكثر من متوسطين:

تحليل التباين Analysis of Variance:

تقوم فكرة تحليل التباين على أساس تجزئة التباين الكلي (Total Variance) إلى مجموعة من المركبات أهمها مركبة التباين بين المجموعات (With Group) ومركبة التباين داخل المجموعات أو الباقي (الخطأ) (Error or resqual) لاختبار تأثير مجموعة من المتغيرات المستقلة على المتغير التابع في جدول يسمى جدول تحليل التباين (ANOVA table).

ولتوضيح فكرة تحليل التباين وبناء جدول تحليل التباين نفرض أن لدينا (K) من العينات (أو المجموعات) سجلت قياسات كل مشاهدة كما موضح بالشكل التالي:

المجموعة	المشاهدات					المجموع	المتوسط
	1	2	3	....	n_i	X_{i1}	$\bar{X}_{i.}$
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	....	X_{1n1}	$X_{1.}$	$\bar{X}_{1.}$
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	....	X_{2n2}	$X_{2.}$	$\bar{X}_{2.}$
.						.	
.						.	
.						.	
.						.	
K	X_{K1}	X_{K2}	X_{k3}	....	X_{knk}	$X_{k.}$	$\bar{X}_{k.}$
						$X_{..}$	$\bar{X}_{..} = \frac{X_{..}}{N}$

حيث أن:

X_{ij} قيمة المشاهدة التي تقع في الصف (i) والعمود (j) وأن:

$i = 1, 2, \ldots, k$

$j = 1, 2, \ldots, n_i$

$$N = \sum_{i=1}^{k} ni$$

$X_{i.}$ مجموع قيم المشاهدات الواقعة في المجموعة (i)

n_i عدد مفردات مشاهدات المجموعة (i)

$\bar{X}_{i.}$ متوسط قيم المشاهدات للمجموعة أو العينة (i)

$$\bar{X}_{i.} = \frac{X_{i.}}{n_i}$$

$X_{..}$ تمثل المجموع العام لقيم جميع المشاهدات أو المفردات

$$X_{..} = \sum_{i=1}^{k} X_{i.}$$

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \dots\dots + n_k$$

$$\bar{X}_{..} = \frac{X_{..}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_{i.}}{N}$$

إن مشاهدات العينات أو المجموعات تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسطات مساوية إلى $(M_1 , M_2 , \dots\dots , M_k)$ وبانحراف معياري يفترض أن يكون متساوي وثابت ومساوي إلى (σ) ويتم اختبار الفرضية (H_0) بمقارنة جميع المتوسطات عن طريق إيجاد قيمة (F) والتي يمكن التوصل إليها من خلال فكرة تحليل التباين وتجزئة مجمع المربعات الكلي (SS_T) إلى جزئين بإضافة وطرح $\bar{X}_{i.}$ وكالآتي:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{ni} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{ni} (X_{ij} - \bar{X}_{i.} + \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2$$

$$= \sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 + \sum \sum (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2$$

$$+ 2 \sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_{i.})(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})$$

ويمكن إثبات أن الحد الثالث يساوي صفراً.

لذا فإن مجموع المربعات الكلي (SS_T):

$$SS_T = \sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2$$

يساوي مجموع المربعات بين المجموعات (SS_B)

$$SS_B = \sum \sum (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2$$

مضافة له مجموع المربعات داخل المجموعات (Within Grups) أو ما يسمى مجموع مربعات الأخطاء أو البواقي (SS_E)

$$SS_E = \sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$$

وبقسمة مركبتي مجموع المربعات بين المجموعات ومجموع المربعات داخل المجموعات على درجات الحرية المقابلة لها، تستخرج متوسط المربعات لكل منهما وبقسمة متوسط مربعات بين المجموعات (MS_B) على مربع المجموعات داخل المجموعات أو الخطأ (MS_E) نستخرج قيمة (F) المحسوبة.

وبذلك يمكن تلخيص المعلومات بجدول يسمى جدول تحليل التباين (ANOVA table) وكالآتي:

مصدر التباين	d.f	مجموع المربعات Sum of Squars	متوسط المربعات Mean squares	F
بين المجموعات Between groups	K - 1	SS_B	$MS_B = \frac{SS_B}{K - 1}$	$F = \frac{MS_B}{MS_E}$
داخل المجموعات Within groups or error	N - K	SS_E	$MS_E = \frac{SS_E}{N.K}$	
الكلي (total)	N - 1	SST		

ويمكن إثبات أن مجموع مربعات المركبات الثلاثة يمكن أن يكون بالشكل التالي:

$$SS_T = \sum \sum X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{N}$$

$$SS_B = \sum \sum \frac{X_{i.}^2}{ni} - \frac{X_{..}^2}{N}$$

$$SS_{within} = \sum \sum X_{ij}^2 - \sum \frac{X_{i.}^2}{ni}$$

ويسمى جدول تحليل التباين السابق جدول تحليل التباين لمعيار واحد (تجزئة التباين الكلي إلى جزئين).

مثال (1.5):

طبقت ثلاثة طرق لتدريس مادة الحاسوب على مجموعة من الطلبة وأجريت عليهم امتحانات نهاية الدورة فكانت علاماتهم موضحة بالجدول التالي اختبر مستوى معنوية 0.05 هل توجد فروقات جوهرية بين الطرق الثلاثة المطبقة في التدريس؟

الحل:

فرضيات البحث هي:

$H_0 = M_1 = M_2 = M_3$

H_1 : على الأقل طريقة منهم تختلف عن البقية

طرق التدريس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$X_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
الطريقة I	8	9	7	8	7	10	5	4	7	5	70	7
الطريقة II	9	7	8	8	6	7	6	4	3	2	40	6
الطريقة III	10	4	3	6	3	2	5	1	4	2	40	4
											170	

الحل:

$$SS_T = \sum \sum X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{N} = (8)^2 + (9)^2 + ... + (2)^2 - \frac{(170)^2}{30}$$
$$= 1150 - 963.3333 = 186.6667$$

$$SS_B = \sum \frac{X_{i.}^2}{ni} - \frac{X_{..}^2}{N} = \frac{(30)^2 + (60)^2 + (40)^2}{10} - 963.3333$$
$$= 1010 - 963.3333 = 46.6667$$

$SS_E = 186.6667 - 46.6667 = 140$

وبذلك يكون جدول تحليل التباين:

مصدر التباين	d.f	S.S	M.S	F_C
بين المجموعات	2	46.6667	23.33335	F = 4.500
داخل المجموعات (الخطأ)	27	140	5.185185	
الكلي	29	186.6667		

نستخرج (F) الجدولية مستوى معنوية 5٪ ودرجات حرية (2) للبسط و(27) للمقام هو:

$$F_{0.05}\,(2,27) = 3.32$$

وبما أن (F) المحسوبة أكبر من (F) الجدولية ترفض فرضية العدم (H_0) وتوجد طريقة على الأقل مختلفة عن بقية الطرق المطبقة في التدريس.

كما ويمكن تحليل التباين الكلي إلى ثلاثة أجزاء أو مركبات عندما تكون مشاهدات العينة تتأثر بمؤشرات ذات اتجاه أفقي ومؤشرات أخرى ذات اتجاه عمودي. حيث أنه بإضافة وطرح كل من: ($\bar{X}_{..}, \bar{X}_{.j}, \bar{X}_{i.}$) داخل قوس مجموع المربعات الكلي $\sum\ (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2$ يصبح كالآتي:

$$\sum\ \sum\ (X_{ij} - \bar{X}_{i.} + \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..} + \bar{X}_{..} - \bar{X}_{..})^2$$

$$= \sum\ \sum\ \left[(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) + (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}) + (X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})\right]^2$$

$$= \sum\ \sum\ (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 + \sum\ \sum\ (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 + \sum\ \sum\ (X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})^2$$

+ كمية مساوية للصفر

وبذلك تم تجزئة مجموع المربعات الكلي إلى ثلاث مركبات وهي:

$$\sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = \sum \sum (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 + \sum \sum (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 + \sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})$$

بين المجموعات (للصفوف) SS_{BR} — بين المجموعات (للأعمدة) SS_{BC} — داخل المجموعات أو الخطأ SS_E

أما جدول تحليل التباين بمعيارين

فيصبح:

مصدر التباين	d.f	S.S	M.S	F_C
بين المجموعات (للصفوف)	K - 1	SS_{BR}	MS_{BR}	$F_R = \frac{MSB_R}{MS_E}$
بين المجموعات (للأعمدة)	C - 1	SS_{BC}	MS_{BC}	$F_C = \frac{MSB_C}{MS_E}$
داخل المجموعات (الخطأ)	(K-1)(C-1)	SS_E	MS_E	
الكلي	KC - 1	SS_T		

حيث أن:

K عدد الصفوف (عدد المجموعات)

C عدد الأعمدة

(F_R) هي قيمة (F) المحسوبة المتعلقة بالصفوف وتقارن مع قيمة (F) الجدولية بدرجتي حرية (K-1) للبسط و(K-1)(C-1) للمقام ولمستوى معنوية محدد مسبقاً.

أما (F_C) فهي قيمة (F) المحسوبة المتعلقة بالأعمدة وتقارن مع (F) الجدولية بدرجتي حرية (C-1) للبسط و(K-1)(C-1) للمقام ولمستوى معنوية محدد مسبقاً.

ويتم رفض الفرضية (H_0) إذا كانت قيمة (F) المحسوبة أكبر أو تساوي قيمة (F) الجدولية.

كما ويمكن كتابة كل من مجاميع المربعات للمركبات الثلاثة والمجموع الكلي كالآتي:

$$SS_T = \sum\sum X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{N}$$

$$SS_{BR} = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{i.}^2}{C} - \frac{X_{..}^2}{N}$$

$$SS_{BC} = \sum_{j=1}^{C} \frac{X_{.j}^2}{K} - \frac{X_{..}^2}{N}$$

$$SS_E = \sum\sum X_{ij}^2 - \sum_{i-1}^{K} \frac{X_{i.}^2}{C} - \sum_{j=1}^{C} \frac{X_{.j}}{K} + \frac{X_{..}^2}{N}$$

حيث أن N = CK

مثال (2.5):

في دراسة لطبيعة الحوادث المرورية في إحدى البلدان سجلت الحوادث المرورية خلال فترة الدراسة استناداً لحالة الجو (غائم، ممطر، صحو) وحسب عمر صاحب المركبة التي وقعت بالحادث.

اختبر بمستوى معنوية (0.05) أنه لا يوجد فروق معنوية في عدد الحوادث حسب حالة الجو ولا توجد فروق معنوية للحوادث استناداً لعمر سائق المركبة.

حالة الجو / العمر	غائم	ممطر	صحو	$X_{i.}$
18-25	10	12	6	28
26-35	8	9	4	21
36-50	6	4	3	13
أكثر من 50	12	14	2	28
$X_{.j}$	36	39	15	90

الحل:

❖ فرضيات البحث:

H_{O1}: لا توجد فروقات جوهرية بين عدد الحوادث من حيث حالة الجو

H_{11}: يوجد اختلافات جوهرية بين عدد الحوادث من حيث حالة الجو

H_{O2} : لا يوجد فروقات جوهرية بين عدد الحوادث من حيث العمر

H_{12} : توجد فروقات جوهرية بين عدد الحوادث من حيث العمر

$$SS_T = 10^2 + 12^2 + ... + 14^2 + 2^2 - \frac{(90)^2}{12} = 171$$

$$SS_{BR} = \frac{(28)^2}{3} + \frac{(21)^2}{3} + \frac{(13)^2}{3} + \frac{(28)^2}{3} - \frac{(90)^2}{12} = 51$$

$$SS_{BC} = \frac{(36)^2}{4} + \frac{(39)^2}{4} + \frac{(15)^2}{4} - \frac{(90)^2}{12} = 85.5$$

$$SS_E = 171 - 51 - 85.5 = 34.5$$

مصدر التباين	d.f	S.S	M.S	F_C
بين المجموعات (للصفوف)	3	51	17	F = 2.9565
بين المجموعات (للأعمدة)	2	85.5	42.75	F = 7.43478
(الخطأ)	6	34.5	5.75	
Total	11	171		

وبمقارنة (F) المحسوبة بين المجموعات للصفوف والمساوية إلى 2.9565 مع (F) الجدولية بمستوى معنوية (0.05) ودرجة حرية (3,6) والتي كانت مساوية إلى (4.76) تقبل الفرضية ولا يوجد اختلافات جوهرية بين من وقع لهم حوادث بالنسبة إلى العمر.

وبمقارنة (F) المحسوبة بين الأعمدة والمساوية 7.43478 مع (F) الجدولية بمستوى معنوية (0.05) ودرجة حرية (2,6) والمساوية إلى (5.14) ترفض فرضية العدم (H_0). وهذا يعني أن هناك اختلافات جوهرية بالنسبة إلى حالة الجو.

أمثلة محلولة

مثال (3.5):

كان الإنتاج اليومي لثلاثة خطوط إنتاجية ولعشرة أيام كالآتي (عدد الوحدات المنتجة خلال اليوم):

اليوم / الخط الإنتاجي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$X_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
I	5	8	4	6	7	6	8	5	4	7	60	6
II	2	5	3	4	6	7	2	3	4	4	40	4
III	9	8	7	8	7	7	8	9	7	10	80	
											180	

هل تعتقد أن هناك اختلافات جوهرية في متوسط إنتاج الخطوط الثلاثة اختبر بمستوى معنوية 0.01.

الحل:

$H_0 : M_1 = M_2 = M_3$

H_1 : على الأقل خط إنتاجي واحد مختلف عن البقية

$$SS_T = 5^2 + 8^2 + 4^2 + \dots\dots\dots + 2^2 + 10^2 - \frac{(180)^2}{30}$$

$$= 1328 - 1080 = 248$$

$$SS_B = \frac{(60)^2 + (40)^2 + (80)^2}{10} - 1080 = 80$$

$$SS_E = 248 - 80 = 168$$

وبذلك يكون جدول تحليل التباين كالآتي:

مصدر التباين	d.f	S.S	M.S	F_C
بين المجموعات	2	80	40	F = 6.42857
داخل المجموعات (الخطأ)	27	168	6.222	
	29	248		

نستخرج (F) الجدولية (مستوى معنوية 0.01) ودرجات حرية (2) للبسط و(27) للمقام:

$$F_{0.01\,,\,(2,27)} = 2.51$$

ولما كانت F المحسوبة (F_C) أكبر من F الجدولية نرفض Ho أي أن الخطوط الإنتاجية الثلاثة ليست متساوية في متوسط الإنتاج ويوجد على الأقل خط إنتاجي واحد يختلف عن البقية.

مثال (45):

الجدول التالي يبين التقييم السنوي لعدد من العاملين في مؤسسة إنتاجية مصنفين حسب التحصيل العلمي اختبر الفرضية أنه لا توجد فروق معنوية في التقييم من حيث التحصيل العلمي ولا توجد فروقات معنوية بين العاملين من حيث تقييمهم.

درجة التقييم / التحصيل العلمي	ضعيف	جيد	جيد جداً	امتياز	$X_{i.}$
ابتدائي	5	4	3	2	14
إعدادي	3	8	10	4	25
ثانوي	2	6	12	2	22
جامعي	1	8	10	6	25
	11	26	35	14	86

الحل:

فرضيات البحث:

H_{01} : لا توجد اختلافات جوهرية بين العاملين من حيث درجة التقييم

H_{11} : يوجد اختلافات جوهرية بين العاملين من حيث درجة التقييم

H_{02} : لا توجد اختلافات جوهرية في تقييم العاملين استناداً للتحصيل العلمي

H_{12} : يوجد اختلافات جوهرية في تقييم العاملين استناداً للتحصيل العلمي

$$SS_T = 5^2 + 4^2 + \dots\dots\dots + 10^2 + 6^2 - \frac{(86)^2}{16}$$
$$= 584 - 462.25 = 12175$$

$$SS_{BR} = \frac{(14)^2}{4} + \frac{(25)^2}{4} + \frac{(22)^2}{4} + \frac{(25)^2}{4} - \frac{(86)^2}{16}$$
$$= 482.5 - 462.25 = 20.25$$

$$SS_{BC} = \frac{(11)^2}{4} + \frac{(26)^2}{4} + \frac{(35)^2}{4} + \frac{(14)^2}{4} - \frac{(86)^2}{16}$$
$$= 554.5 - 462.25 = 92.25$$

$$SS_E = 121.75 - 20.25 - 92.25 = 9.25$$

وبذلك فإن جدول تحليل التباين يصبح كالآتي:

مصدر التباين	d.f	S.S	M.S	F_C
بين المجموعات (الصفوف)	3	20.25	6.75	$F_R = 6.5675$
بين المجموعة (الأعمدة)	3	92.25	30.75	$F_C = 29.918854$
الباقي (الخطأ)	9	9.25	1.02778	
Total	15	121.75		

نجد قيمة F الجدولية بمستوى معنوية 0.05 ودرجة حرية 3 للبسط و9 للمقام هو:

$$F_{0.05,(3,9)} = 3.86$$

لاختبار الفرضية H_{01} نقارن F_R (بين الصفوف مع F الجدولية فنجد أن F_R أكبر من F الجدولية، نرفض H_{01} وهذا يعني أنه يوجد اختلافات جوهرية بين العاملين من حيث درجة التقييم ولاختبار الفرضية H_{02} (بين الأعمدة) مع F الجدولية فنجد أن F_C أكبر من F الجدولية لذا نرفض H_{02} وهذا يعني أنه يوجد اختلافات جوهرية في تقييم العاملين استناداً للتحصيل العلمي (أثر التحصيل العلمي في درجة التقييم).

أسئلة الفصل الخامس

1) التالي متوسط علامات الطلاب لسبعة جامعات استخدمت ثلاث طرق مختلفة في تدريب مادة الرياضيات، اختبر أنه هل توجد فروق معنوية بين متوسطات علامات الطلاب في الجامعات الثلاثة (اختبر بمستوى معنوية 1٪):

الجامعة / طرق التدريس	1	2	3	4	5	6	7
I	70	60	55	88	66	88	60
II	80	75	65	80	70	90	70
III	85	90	75	70	75	95	80

2) التالي درجة تقييم الموظف بعد اجتيازه الدورات التدريبية:

التقييم / الدورات	1	2	3	4	5	6	7	8	9
دورة واحدة	60	55	80	77	50	70	80	85	80
دورتين	70	60	90	60	55	75	80	90	80
ثلاثة أو أكثر	80	60	95	60	60	75	80	90	85

اختبر بمستوى معنوية 5٪ هل توجد فروق معنوية في تقييم الموظف استناداً لعدد الدورات التدريبية التي اجتازها.

3) الجدول التالي يبين عدد التوقفات شهرياً في الماكنة:

عمر الماكنة	بلد الصنع			
	الصين	ماليزيا	اليابان	محلي
1 سنة	2	1	0	0
2	4	2	1	1
3	10	2	1	2
4	12	5	2	3

اختبر بمستوى معنوية 0.01/

1. لا توجد فروق معنوية بين المكائن استناداً لعمر الماكنة.

2. لا توجد فروق معنوية بين المكائن استناداً لبلد الصنع.

4) الجدول التالي يبين عدد المستثمرين في أحد الأسواق:

عدد أسهم المحفظة الاستثمارية / نوع المستثمر	2	3	4	5	6	7	8	9
محلي	8	8	10	12	8	10	12	10
عربي	6	5	8	6	6	4	10	15
أجنبي	2	3	6	4	6	2	10	18

اختبر بمستوى معنوية 0.05:

1. لا توجد فروق معنوية بين المستثمرين استناداً لنوعهم.

2. لا توجد فروق معنوية بين المستثمرين استناداً لعدد أسهم المحفظة.

الفصل السادس

اختبارات تتعلق بالنسب

الفصل السادس

اختبارات تتعلق بالنسب

تستخدم النسب عادةً مع المتغيرات النوعية أو الصفات التي لا يمكن التعبير عنها بشكل كمي (وحدة قياس) بل نلجأ إلى اعتماد تكرار الظاهرة منسوباً إلى التكرار الكلي وهذا ما يسمى بالنسبة، فلو كانت الدراسة حول نسبة مستخدمي البطاقة الائتمانية من عملاء البنك، يكون لدينا بيانات عن عدد عملاء البنك الكلي وعدد مستخدمي البطاقة، وبالتالي يمكن الحصول عل نسبة مستخدمي البطاقة الائتمانية ونسبة عدم مستخدميها. وفي هذه الحالة لا يمكن أن يتبع هذا المتغير أي توزيع مستمر ممن أشرنا إليه في فصول سابقة، وإنما يتبع أحد التوزيعات المتقطعة مثل توزيع ثنائي الحدين (أو توزيع بواسون أو غيرها).

وعندما يكون حجم العينة كبيراً يزداد قيمة احتمال النجاح (P) وكذلك قيمة احتمال الفشل (q) (لا تكون القيمتان قريبة من الصفر) ويقترب توزيع ثنائي الحدين من التوزيع الطبيعي، لذا يمكن دراسة اختبار النسب حسب الحالات التالية:

6-1 اختبار يتعلق بنسبة واحدة عندما يكون حجم العينة كبيراً:

إذا كان المتغير (X) متغيراً وصفياً يشير إلى عدد حالات النجاح في (n) من المحاولات المستقلة باحتمال نجاح مقداره (P) في المحاولة الواحد، أي أن (X) متغيراً يتوزع توزيع ثنائي الحدين بمتوسط مقداره (np) وتباين مقداره (npq) ولما كانت (n) كبيرة (أكبر من 30) فإن التوزيع سيؤول إلى التوزيع الطبيعي.

وعليه فإن الدرجة المعيارية Z:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \qquad \text{..........(6-1)}$$

سيتوزع توزيعاً طبيعياً قياسياً بمتوسط مقداره (صفر) وثنائي مقداره (1).

وعليه فلاختبار الفرضية:

$H_0 : P = P_0$

حيث أن (P_0) قيمة النسبة المعطاة أو المحددة والتي يدور حولها الاختبار ضد الفرضية البديلة التي يمكن أن تكون على شكل:

$H_1 : P \neq P_0$
or $P > P_0$
or $P < P_0$

نحسب ($\hat{P}$) بالصيغة التالية:

$$\hat{P} = \frac{X}{n} \qquad \text{.........(6-2)}$$

وهي نسبة حالات النجاح إلى الحالات الكلية للعينة ويكون معيار الاختبار:

$$Z = \frac{n\hat{p} - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} \qquad \text{.........(6-3)}$$

و(Z) هناك يتوزع توزيعاً طبيعياً قياسياً بمتوسط (صفر) وتباين مساوي إلى (1). وتقارن قيمة (Z) المحسوبة مع (Z) الجدولية بمستوى معنوية معلوم ومحدد سابقاً.

مثال (1.6):

ادعت شركة تنتج أقداح بلاستيكية أن عدد الكؤوس المعيبة لا يزيد عن (5) أقداح لكل (100) قدح منتج، ولغرض التأكد من ادعاء الشركة تم سحب عينة من الإنتاج بحجم (80) قدح وجد أن (3) منها معيب.

اختبر ادعاء الشركة بمستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات الاختبار الملائمة:

$H_0 : P \leq 0.05$
$H_1 : P > 0.05$

❖ نحسب:

$$\hat{P} = \frac{3}{80} = 0.0375$$

$$q = 1 - p = 1 - 0.05 = 0.95$$

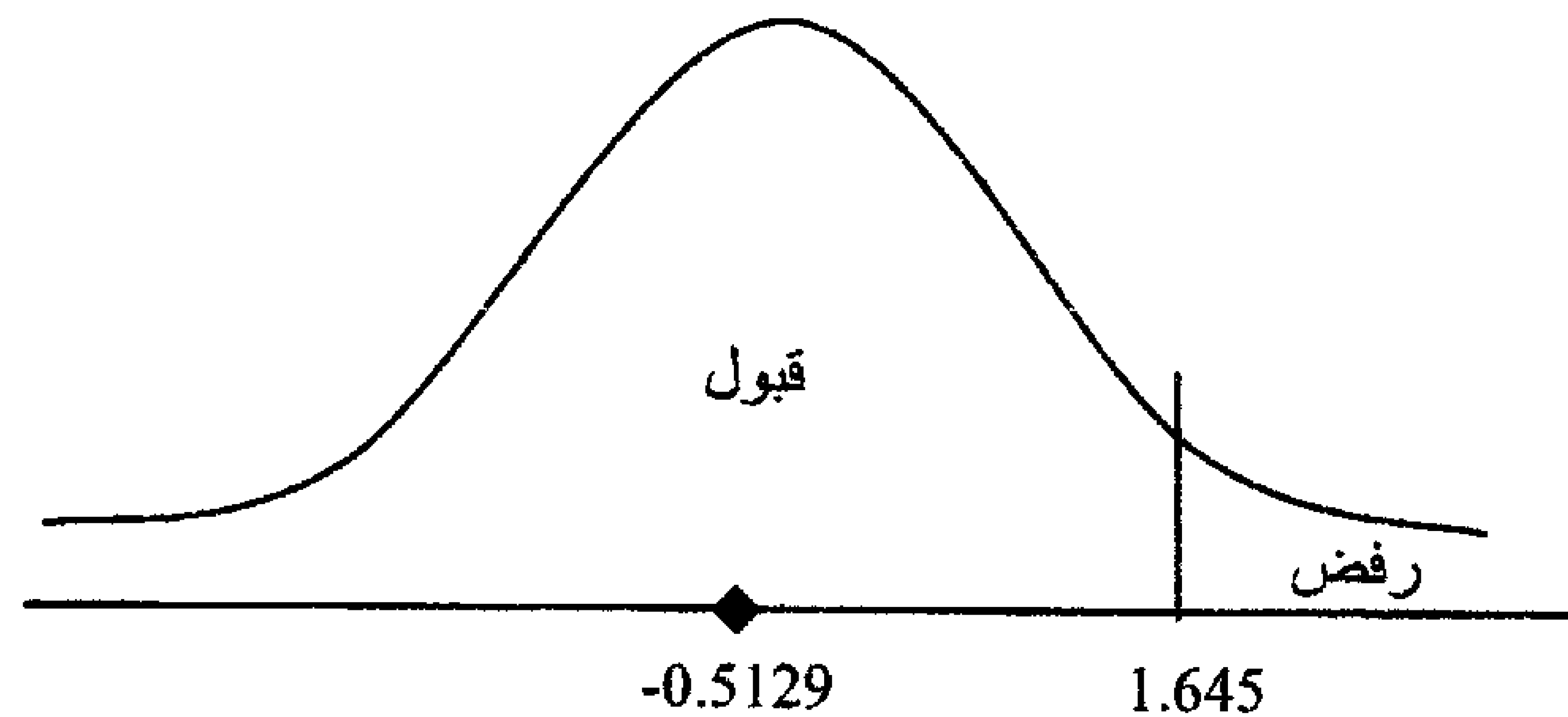
❖ نحسب إحصاء الاختبار:

$$Z = \frac{0.0375 - 0.05}{\sqrt{(0.05)(0.095)/80}} = \frac{-0.0125}{0.024366985}$$

$$= -0.5129$$

$$Z_{0.05} = 1.645$$

❖ المنطقة الحرجة والنقطة الحرجة هي:



❖ بما أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة القبول تقبل (H_0).

وهذا يؤيد ادعاء الشركة في أن عدد الأقداح المعيبة لا يزيد عن 0.05.

2-6 اختبار الفرق بين نسبتين:

إذا كان (X_1) متغير عشوائي يمثل عدد حالات النجاح في العينة الأولى والتي تحتوي على (n_1) من المحاولات المستقلة وباحتمال نجاح لأي محاولة مساوي إلى (P_1) وأن (X_2) متغير عشوائي يمثل عدد حالات النجاح في العينة الثانية والتي تحتوي على (n_2) من المحاولات المستقلة وباحتمال نجاح لأي محاول مساوي إلى (P_2) ولنفس الصفة المدروسة في العينة الأولى.

إن (X_1) يتوزع توزيع ثنائي الحدين بمتوسط (n_1p_1) وتباين $(n_1p_1q_1)$

وإن (X_2) يتوزع توزيع ثنائي الحدين بمتوسط (n_2p_2) وتباين $(n_2p_2q_2)$

وبفرض أن العينتين مستقلتين (وبحجم عينتين كبير) يصبح:

$\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ له توزيع طبيعي بمتوسط (P_1) وتباين $\frac{p_1q_1}{n_1}$

وأن $\hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2}$ له توزيع طبيعي بمتوسط (P_2) وتباين $\frac{p_2q_2}{n_2}$

وأن $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ له توزيع طبيعي بمتوسط (P_1-P_2) وتباين $\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}$

وعليه فإن معيار اختبار الفرق بين نسبتين هو:

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}} \qquad ....(6-4)$$

و(Z) تتوزع توزيعاً طبيعياً قياسياً بمتوسط يساوي (صفراً) وتباين يساوي (1).

ولاختبار الفرضية:

$$H_0 : P_1 = P_2$$
$$\text{or} \quad P_1 - P_2 = 0$$

يكون معيار الاختبار:

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad \text{.........(6-5)}$$

وهنا يجب تقدير قيم (p , q) لأنها مجهولة وكالآتي:

$$\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \qquad \text{.........(6-6)}$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{p}$$

وبالتالي يصبح معيار الاختبار:

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad \text{.........(6-7)}$$

حيث أن:

$$\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1} \qquad \text{.........(6-8)}$$

$$\hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2}$$

و(Z) هنا تتوزع توزيع طبيعي قياسي بمتوسط مساوي إلى (صفر) وتباين يساوي (1).

مثال (2.6):

لدراسة مستوى الرضا عن منتج الحليب المجفف الوطني مقارنة مع المنتج الأجنبي وزعت استمارة استبيان على (200) مستهلك للمنتج الوطني وجد أن (25) منهم قد سجل شكوى عنه، ووزعت الاستمارة على (150) مستهلك للمنتج الأجنبي ووجد أن (10) منهم قد سجل شكوى عنه.

فهل تعتقد أن هناك اختلافات جوهرية من حيث الرضا عن المنتجين، اختبر بمستوى معنوية 5٪.

الحل:

❖ فرضيات البحث:

$H_0 : P_1 = P_2$ or $P_1 - P_2 = 0$

$H_1 : P_1 \neq P_2$ or $P_1 - P_2 \neq 0$

$$\hat{P} = \frac{25+10}{200+150} = 0.1$$

$$\hat{q} = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$\hat{P}_1 = \frac{25}{200} = 0.125$$

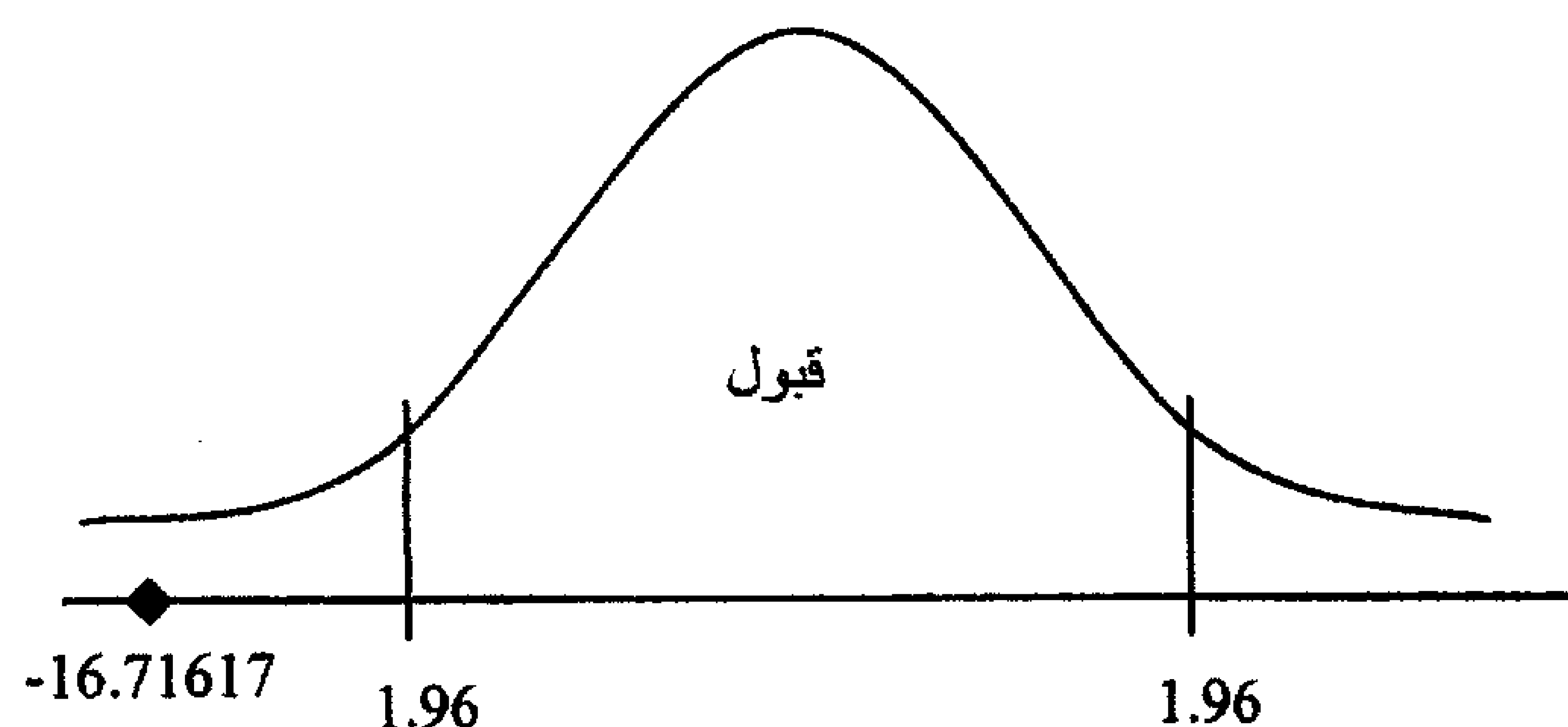
$$\hat{P}_2 = \frac{10}{150} = 0.66666$$

$$Z = \frac{0.125 - 0.66666}{\sqrt{(0.1)(0.9)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{150}\right)}} = -16.71617$$

❖ نجد $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

❖ نجد المساحة الحرجة والنقاط الحرجة:



ومن ملاحظة أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة الرفض (لاحظ الشكل السابق) ترفض فرضية العدم (H_0) وأن نسب الرضا عن المنتجين ليست متساوية.

أمثلة محلولة

مثال (3.6):

أنتجت إحدى الشركات منتج ادعت أنه على الأكثر واحد من بين كل (200) منتج لا يطابق المواصفات ولغرض اختبار ادعاء الشركة سحبت عينة بحجم (50) منتج فوجد أن (2) منها لا يطابق المواصفات. هل تعتقد أن ادعاء الشركة صحيح اختبر بمستوى معنوية 0.01.

الحل:

فرضيات البحث:

$$H_0 : P \leq 0.005$$
$$H_1 : P > 0.005$$

$$\hat{P} = \frac{2}{50} = 0.04$$

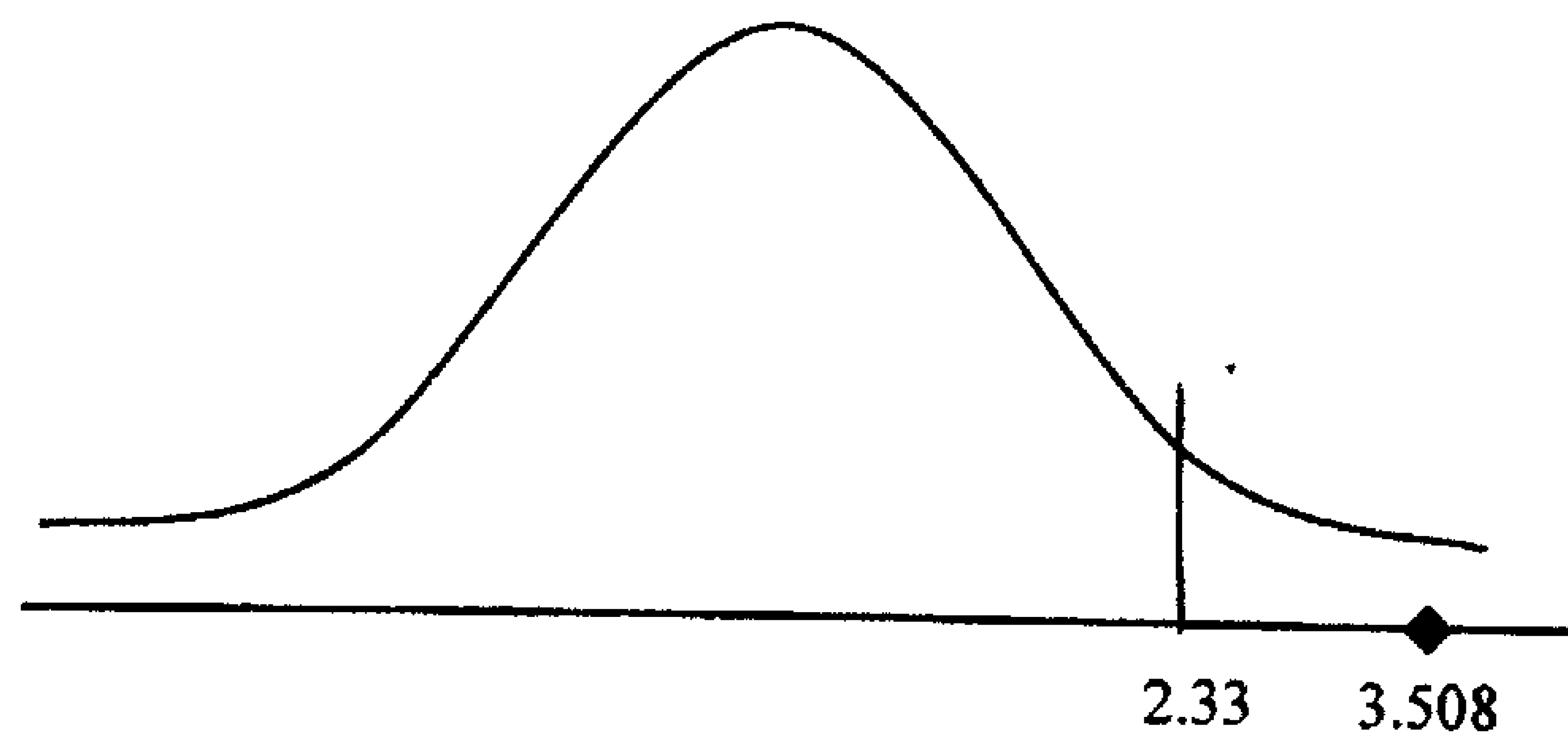
$$\hat{q} = 1 - \hat{P} = 1 - 0.005 = 0.995$$

❖ نحسب معيار الاختبار:

$$Z = \frac{0.04 - 0.005}{\sqrt{(0.005)(0.995)/50}} = \frac{0.035}{0.009975} = 3.508$$

❖ نجد القيم الحرجة والمساحة الحرجة:

$$Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.33$$



❖ **القرار:** بما أن قيمة Z المحسوبة وقعت في منطقة الرفض (لاحظ الشكل) نرفض H_0 أي أن نسبة المنتج الذي لا يطابق المواصفات أكبر من 0.005.

مثال (4.6):

لدراسة مستوى الأداء لشركتين من شركات التأمين وجد أن (20) معاملة من معاملات التأمين على السيارات كان تأميناً شاملاً من مجموع (200) معاملة تأمين في الشركة الأولى أما في الشركة الثانية فقد كان (30) معاملة من (100) معاملة من معاملات التأمين على السيارات كان من نوع التأمين الشامل. هل تعتقد أن هناك اختلافات جوهرية بين الشركتين من حيث معاملات التأمين على السيارات. اختبر بمستوى معنوية 5٪.

الحل:

$$H_0 : P_1 = P_2 \quad \text{or} \quad P_1 - P_2 = 0$$
$$H_1 : P_1 \neq P_2 \quad \text{or} \quad P_1 - P_2 \neq 0$$

$$\hat{P} = \frac{20+30}{200+100} = \frac{50}{300} = 0.1667$$

$$\hat{q} = 1 - 0.1667 = 0.8333$$

$$\hat{P}_1 = \frac{20}{200} = 0.1$$

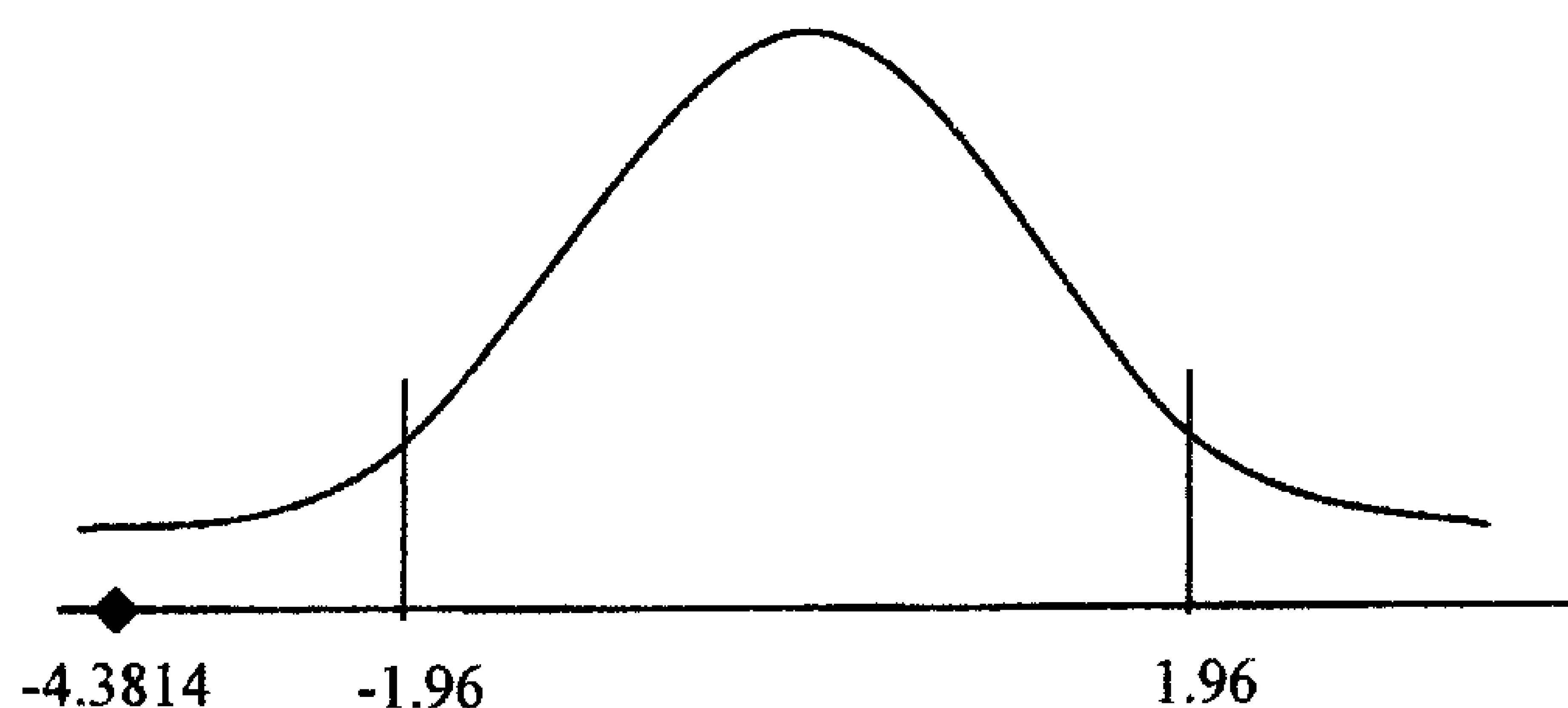
$$\hat{P}_2 = \frac{30}{100} = 0.30$$

$$Z = \frac{0.10 - 0.30}{\sqrt{(0.1667)(0.8333)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{100}\right)}}$$

$$Z = \frac{-0.20}{\sqrt{0.1389111(0.015)}} = -4.3814$$

❖ نجد القيم الحرجة والمساحة الحرجة:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$



❖ **القرار:** بما أن Z المحسوبة وقعت في منطقة الرفض نرفض H_0 أي أن النسب مختلفة لكلا الشركتين.

أسئلة الفصل السادس

1) ادعت شركة أن نسبة العيوب في الإنتاج هو 1 لكل 100 منتج ولغرض اختبار ادعاء الشركة سحبت عينة بحجم (150) منتج فوجد أن هناك ثلاثة وحدات معيبة ، اختبر ادعاء الشركة بمستوى معنوية 0.01.

2) اعتادت أحد المصانع على إنتاج منتج يكون فيه واحد من كل (300) منتج غير مطابق للمواصفات ولغرض اختبار هل لا زال المصنع ينتج بنفس الطريقة سحبت عينة حجمها (70) منتج فوجد أن (2) منها غير مطابق للمواصفات اختبر مستوى معنوية 5٪ هل أن المصنع لا زال ينتج بنفس المواصفات المعتادة.

3) إذا كان نسبة الإنتاج المعيوب المعتاد في الشركة الأولى 0.01 بينما كان نسبة الإنتاج المعيوب في الشركة الثانية 0.02 سحبت عينة بحجم (50) منتج من منتجات الشركة الأولى فوجد أن (2) منها معيبة وسحبت عينة بحجم (60) منتج من منتجات الشركة الثانية فكان عدد الوحدات المعيبة (2) أيضاً هل تعتقد أن هناك فروق معنوية بين الشركتين من حيث نسب المعيب؟ اختبر بمستوى معنوية 0.01.

4) إذا كان عدد الشكاوى المقدمة على نحو معين على السيارات هي (6) لكل (100) شخص يمتلك النوع A بينما (8) لكل (100) ممن يمتلك النوع B، سحبت عينة بحجم (60) شخص يمتلكون النوع A وجد أن (3) منهم يشتكون منها ، وسحبت عينة بحجم (50) شخص يمتلك النوع B وجد أن (4) منهم يشتكون منها هل تعتقد أن نسب المشتكين على السيارات من النوعين متساوية اختبر بنسبة 5٪.

الفصل السابع

اختبارات تتعلق بالتباين والانحراف المعياري

الفصل السابع

اختبارات تتعلق بالتباين والانحراف المعياري

سنتطرق في هذا الفصل إلى الاختبارات المتعلقة بتباين مجتمع يتوزع توزيع طبيعي واختبار تجانس تباينين أو تجانس التباين لعدة تقديرات مستقلة واختبار الفرق بين انحرافين معياريين.

7-1 اختبار يتعلق بتباين مجتمع يتوزيع توزيع طبيعي:

إذا كان مجتمع المتغير (X) مجتمعاً طبيعياً بمتوسط مساوي إلى (M) وتباين مساوي إلى (σ^2) و(σ^2) غير معلوم، وتم سحب عينة من هذا المجتمع بحجم (n) وكان تباين هذه العينة هو (S^2).

لاختبار أن تباين هذا المجتمع يساوي قيمة معينة ولتكن (σ_0^2) فإن فرضية العدم أو الصفرية تصاغ بالشكل التالي:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

وأن معيار أو إحصاءة الاختبار هو:

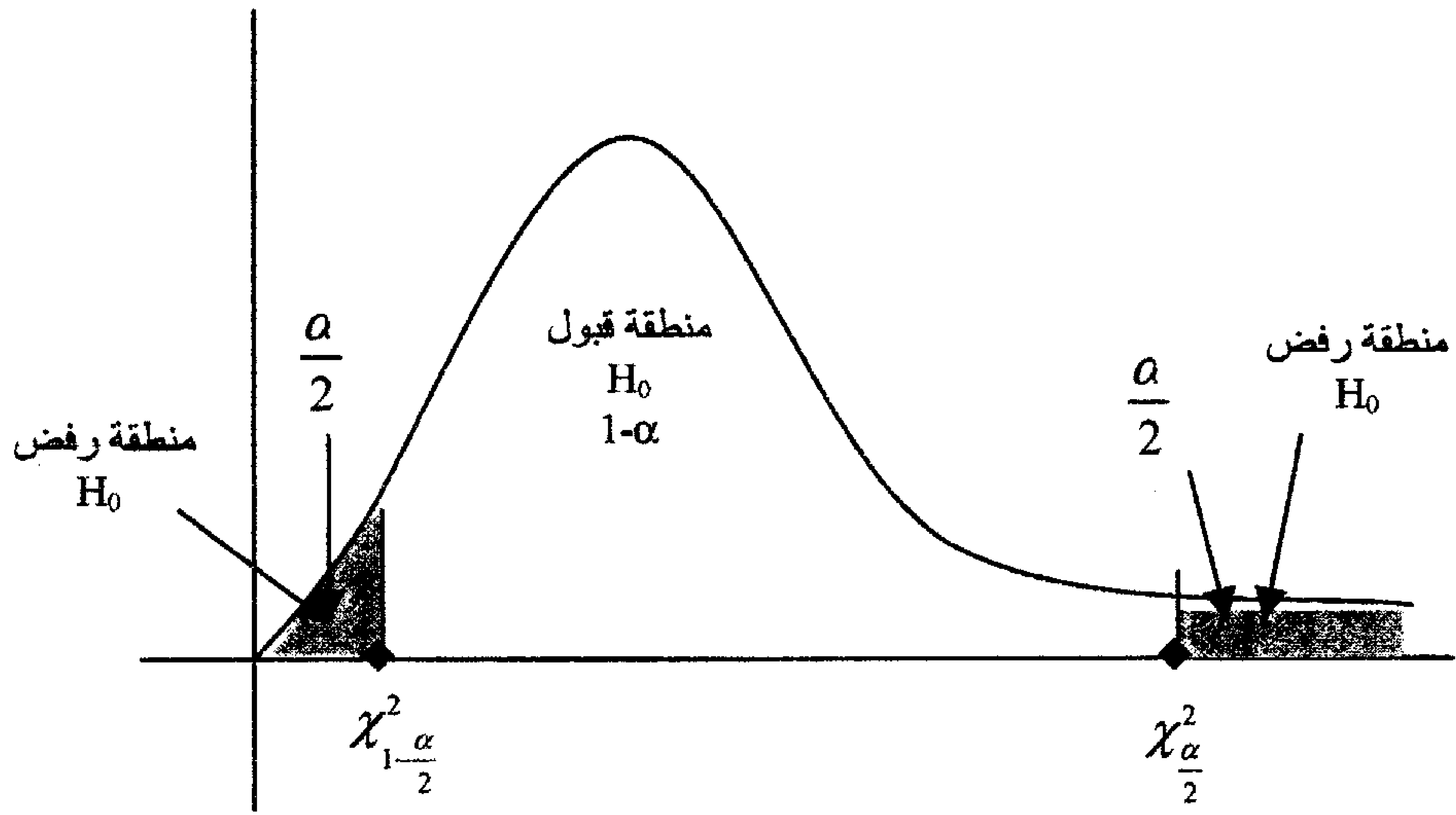
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \qquad \text{..........(7-1)}$$

وهذا المعيار يتوزع توزيع مربع كاي بدرجة حرية (n-1).

ولتحديد المناطق الحرجة والقيم الحرجة لمناطق الرفض يجب ملاحظة الفرضية البديلة فإذا كانت الفرضية البديلة:

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

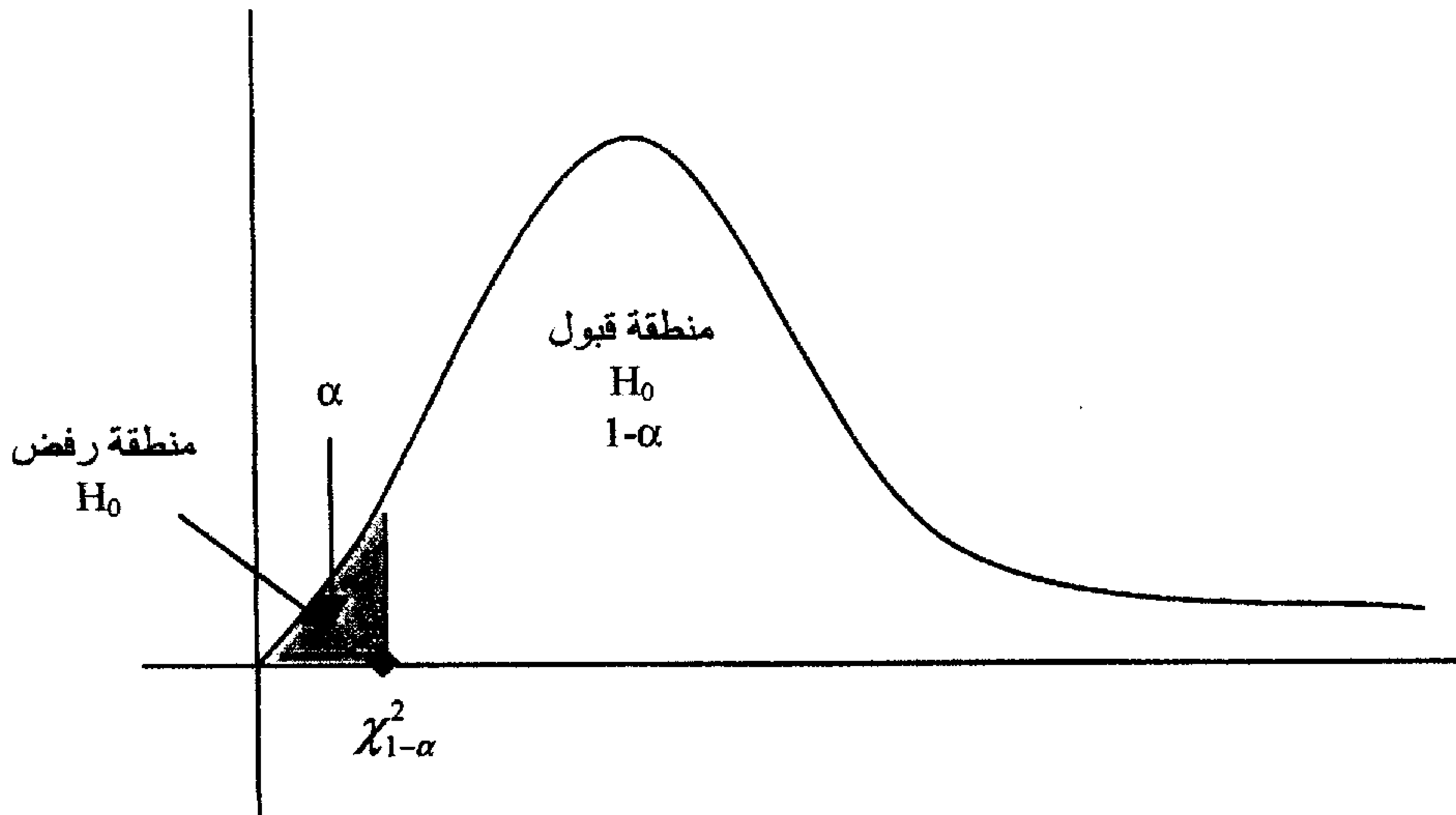
فإن هناك منطقتي رفض إلى اليسار واليمين من منحنى التوزيع، لاحظ الشكل التالي:



أما إذا كانت الفرضية البديلة:

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

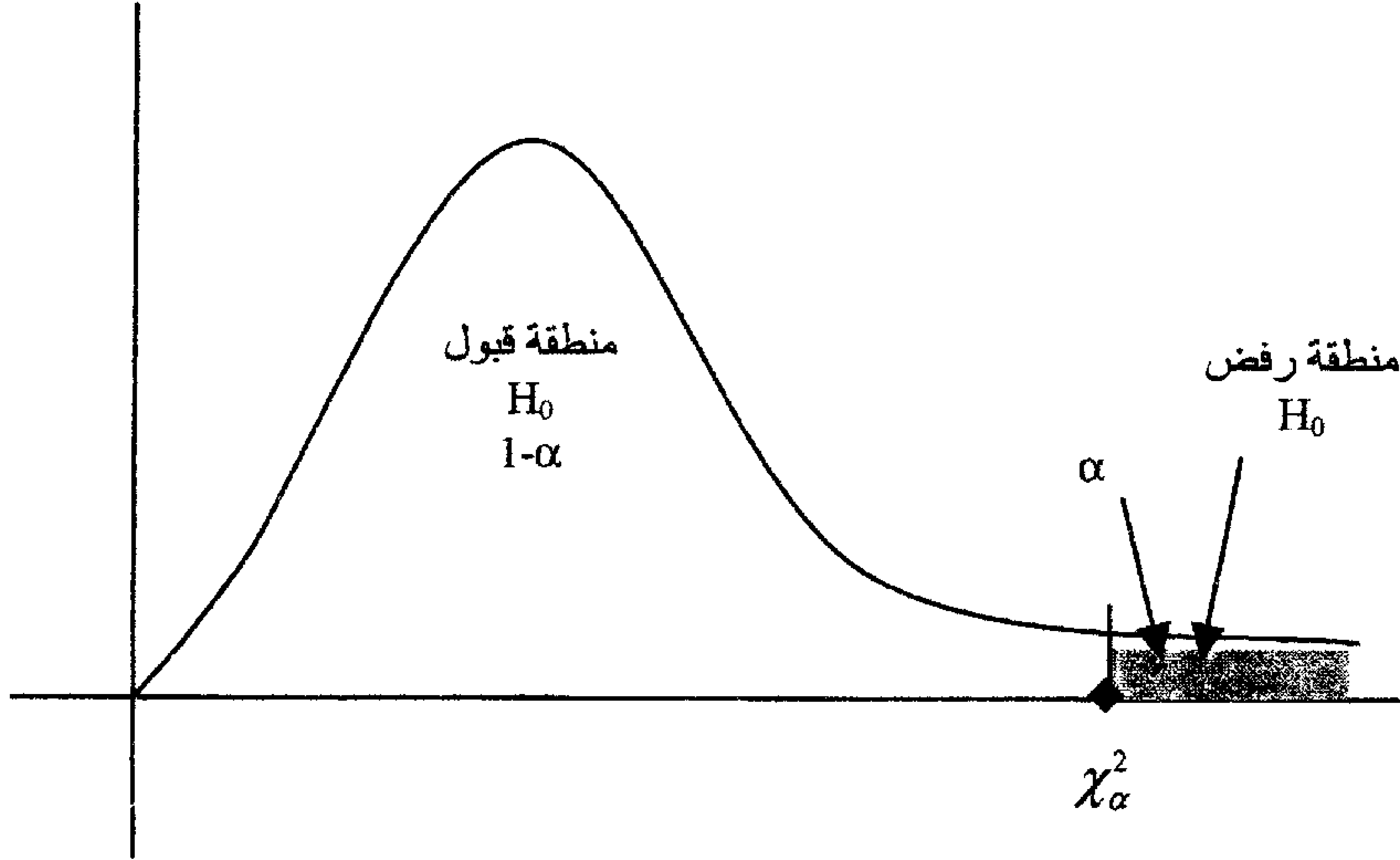
فإن منطقة رفض (H_0) تكون إلى اليسار وتساوي (α) لاحظ الشكل التالي:



وإذا كانت الفرضية البديلة بالشكل التالي:

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

تكون منطقة رفض (H_0) إلى يمين المنحنى وتساوي (α) لاحظ الشكل التالي:



مثال (1.7):

إذا كان مصنع لعلب الحلوى ينتج علباً تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط وزن للعلبة المنتجة مساوي إلى (100) غم وبانحراف معياري مقداره (3) غم، وللتأكد أن المصنع ما زال محافظاً على نوعية الإنتاج ولا زالت الانحرافات المعيارية في الإنتاج لا تزيد عن (3) غم سحبت عينة عشوائية من هذا الإنتاج بحجم (51) علبة وجد أن الانحراف المعياري في أوزان العلب لهذه العينة (4) غم. هل تعتقد بأن إنتاج المصنع لا زال ضمن ضوابط الجودة عند مستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات البحث:

$$H_0 : \sigma^2 \leq 9$$
$$H_1 : \sigma^2 > 9$$

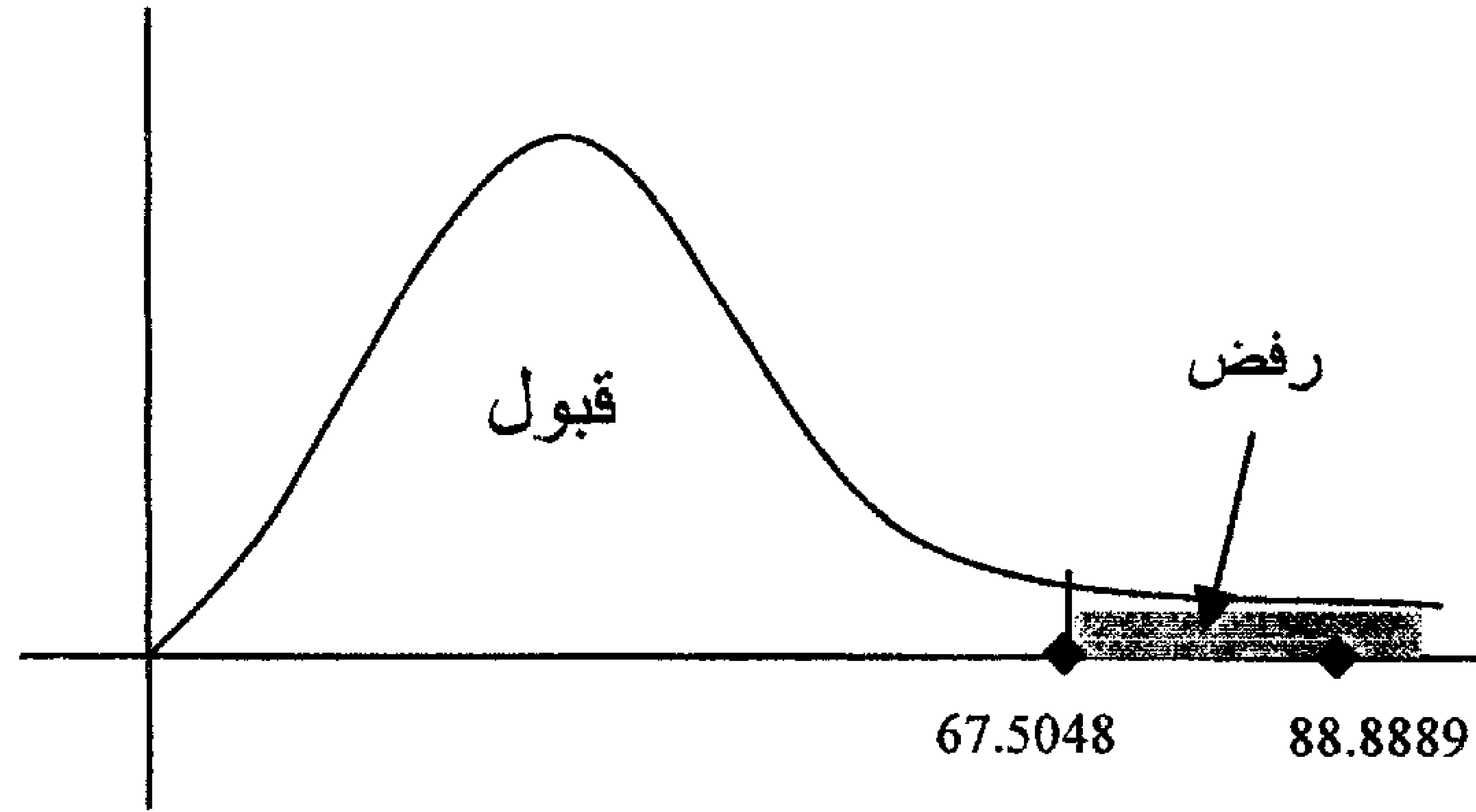
❖ معيار أو إحصاءة البحث:

$$\chi^2 = \frac{(51-1)(16)}{9} = 88.8889$$

❖ نجد قيمة مربع كاي الجدولية لمستوى معنوية 0.05 ودرجة حرية (50) هي:

$$\chi^2_{(0.05,50)} = 67.5048$$

القرار: بما أن قيمة (χ^2) المحسوبة أكبر من الجدولية ووقوعها في منطقة الرفض لاحظ الشكل:



لذا ترفض فرضية العدم (H_0) أي أن الانحرافات المعيارية في الإنتاج قد اختلفت وهي لا تقل عن (3).

مثال (2.7):

اعتادت إحدى معامل إنتاج مسحوق الغسيل على إنتاج علبة بوزن (2000) غم بانحراف معياري مقداره (5) غم ولغرض قياس كفاءة الإنتاج من حيث أن وزنه لا زال ضمن القياسات المحددة وأن الانحراف المعياري بالإنتاج لا زال (5) غم فقط سحبت عينة بحجم (61) علبة وجد أن متوسط وزنها (1990) غم بانحراف معياري مقداره (7) غم اختبر بمستوى معنوية (0.05) هل توجد فروق معنوية في

إنتاج العمل كما كان عليه سابقاً من حيث التباين أو الانحراف المعياري في وزن العلبة المنتجة.

الحل:

❖ فرضية الاختبار هي:

$$H_0 : \sigma^2 = 25$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq 25$$

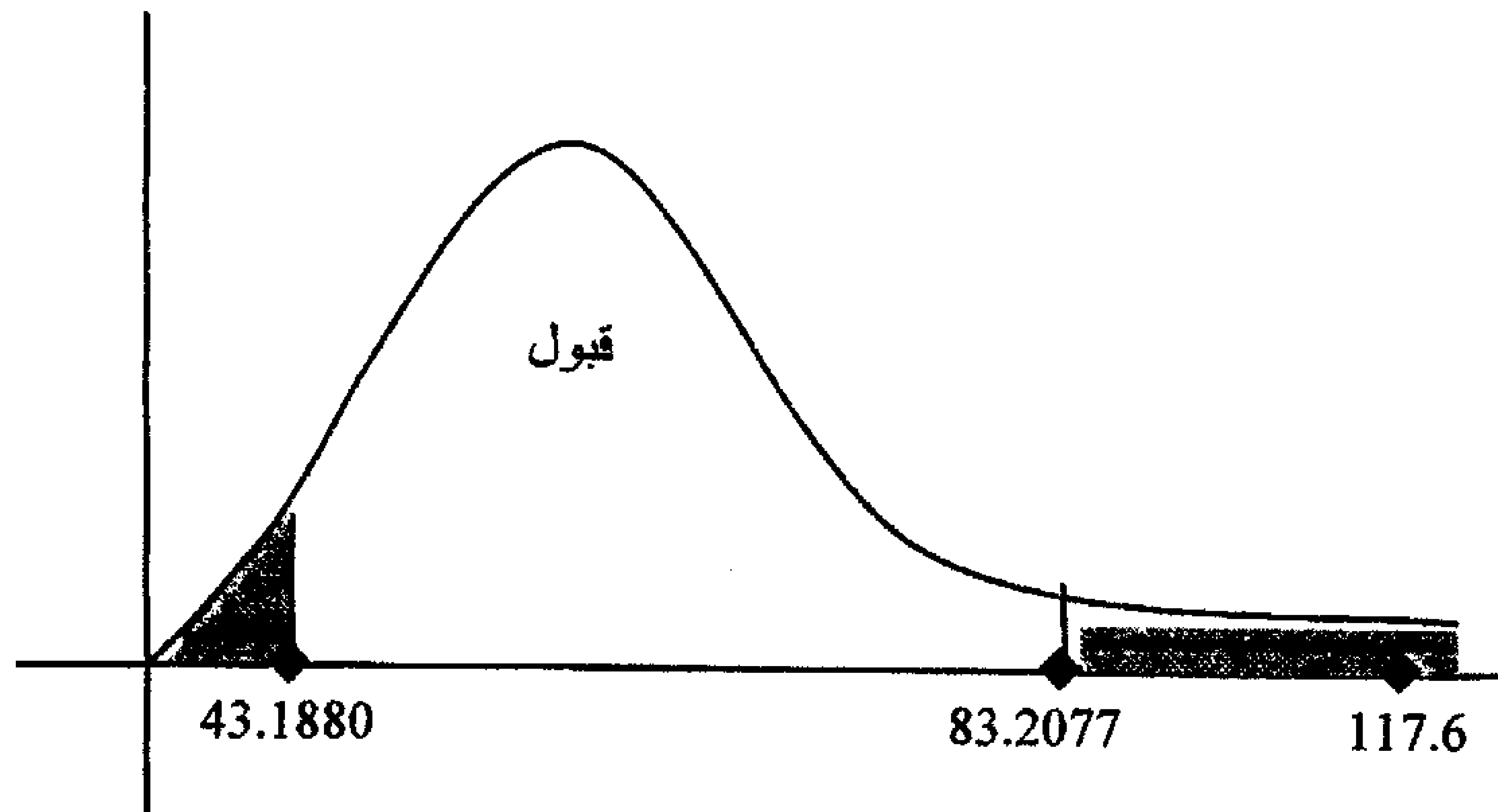
❖ معيار أو إحصاءة الاختبار:

$$\varphi^2 = \frac{(61-1)(7)^2}{25} = 117.6$$

قيمة مربع كاي الجدولية بمستوى معنية $\frac{0.05}{2}$ وبدرجة حرية 60 هي:

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.025,60} = 83.2077 \quad \text{and} \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.975,60} = 43.1880$$

وبما أن قيمة (χ^2) المحسوبة قد وقعت في منطقة الرفض انظر الشكل التالي:



لذا نرفض فرضية العدم (H_0) أي أن الانحراف المعياري في الإنتاج لا يساوي (5) غم وأن التباين في وزن العلبة لا يساوي (25) غم وأن الإنتاج قد تغير عما كان عليه من حيث الانحرافات المعيارية في وزن العلبة.

2-7 اختبار تجانس تباينين طبيعيين:

إذا كان لدينا مجتمعين يتوزعان توزيعاً طبيعياً بتباينين غير معلومين هما (σ_2^2, σ_1^2) على التوالي وسحبت عينة بحجم (n_1) من المجتمع الأول وحسب تباين العينة وكان مساوي إلى (S_1^2) وسحبت عينة من المجتمع الثاني بحجم (n_2) وحسب تباين العينة الثانية وكان مساوي إلى (S_2^2) وإذا افترضنا أن العينتين مستقلتين كونها سحبتا من مجتمعين مختلفين مستقلين.

فإذا كان الاختبار يدور في أن المجتمعين لا يختلفان من حيث التباين وأن $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ باعتبار أن (S_1^2) هو تقدير إلى (σ_1^2) وأن (S_2^2) هو تقدير إلى (σ_2^2) وأن التقديران مستقلان ستكون فرضية البحث الرئيسة هي:

$$H_0 : (\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$$

أما معيار الاختبار الملائم (على فرض أن $S_1^2 > S_2^2$) هو:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad \text{..........(7-2)}$$

وهو يتوزيع توزيع (F) بمستوى معنوية معلوم وبدرجة حرية $(n_1\text{-}1)$ للبسط و$(n_2\text{-}1)$ للمقام.

ملاحظة:

إذا كان ($S_2^2 > S_1^2$) فإن معيار الاختبار الملائم:

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} \qquad \text{..........(7-3)}$$

وهو يتوزيع توزيع (F) بمستوى معنوية معلوم وبدرجة حرية $(n_2\text{-}1)$ للبسط و$(n_1\text{-}1)$ للمقام.

مثال (3.7):

لشركة معملين لإنتاج المشروبات الغازية بعبوة تحتوي على نفس الكمية من المشروب، ولغرض التأكد من أن إنتاج المعملين بنفس التباين سحبت عينة بحجم (11) عبوة من المعمل الأول فكان التباين في كمية العبوات المنتجة (9) ملل وسحبت عينة أخرى من منتجات المعمل الثاني بحجم (11) عبوة فكان التباين في حجم العبوات المنتجة هو (6.25) ملل. هل تعتقد بوجود فروق معنوية بين تبايني المعملين في العبوات المنتجة عند مستوى معنوية (0.10).

الحل:

❖ فرضيات الاختبار:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

❖ معيار أو إحصاءة الاختبار:

$$F = \frac{9}{6.25} = 1.44$$

❖ (F) الجدولية بمستوى معنوية $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ أي (0.05) ودرجة حرية (10) للبسط و(10) للمقام هي:

$$F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = F_{0.05,10,10} = 2.95$$

وبما أن قيمة (F) المحسوبة أقل من قيمة (F) الجدولية تقبل (H_0) أي أنه لا توجد فروق معنوية بين تبايني المعملين في كمية العبوات المنتجة.

3-7 اختبار تجانس عدة تقديرات مستقلة لتباين المجتمع:

◆ اختبار بارتليت **Bartlett test**:

إذا سحبت (K) من العينات المستقلة بحجم n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ وحسب منها (K) من التقديرات المستقلة لتباين المجتمع (σ^2) ولغرض إجراء اختبار يقول أن هذه العينات مسحوبة من مجتمع تباينه (σ^2) أي أن جميع تباينات العينات (S_1^2) متجانسة ومتساوية معنوية تكون صيغة الفرضيات:

$H_0 : \sigma^2$ أن العينات جميعها سحبت من متجمع تباينه

$V_s\ H_1 :$ أن العينات تم سحبها من مجتمعات مختلفة التباين

أي أن:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \sigma_k^2 = \sigma^2$

$V_s\ H_1 : \sigma^2$ هناك على الأقل أحد التباينات لا تساوي

أما معيار أو إحصاءة الاختبار فهي:

$$X^2 = \frac{(n-k)\ |n(S_p^2) - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ |n\ \ S_i^2}{1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) - \frac{1}{N-K}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots(7\text{-}4)$$

$$\text{wher } N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$S_p^2 = \frac{1}{N-K}\sum(n_i - 1)\ \ S_i^2 \quad \ldots\ldots\ldots(7\text{-}5)$$

in the pooled estimate for tne variance

ملاحظة: قبل إجراء اختبار بارتليت يفضل اختيار أصغر تباين (S_S^2) من التباينات المستخرجة من (K) من العينات وأكبر تباين (S_L^2) فيها ويتم إجراء اختبار (F) حيث أن:

$$F = \frac{S_L^2}{S_S^2} \quad \ldots\ldots\ldots(7\text{-}6)$$

فإذا تم رفض (H_0) أي أن الفروقات معنوية يتم إجراء اختبار بارتليت للتأكد أما إذا تم قبول الفرضية (H_0) عندئذ يمكن القول بأنه لا توجد فروق جوهرية بين تباينات هذه العينات وأنها متجانسة ولا داعي لإجراء اختبار بارتليت.

مثال (4.7):

لقياس التغيرات في سعر السهم سحبت عينة لأسعار نفس السهم لـ(20) يوم فكان التباين في سعر السهم (0.03) وسحبت عينة بحجم (25) يوم لأسعار سهم آخر فكان التباين في سعر السهم (0.04)، ولسهم ثالث سحبت عينة بحجم (28) يوم كان التباين في سعر السهم (0.05). هل أن العينات الثلاثة مسحوبة من مجتمع طبيعي واحد، اختبر بمستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات البحث هي:

$H_0 : \sigma^2$ أن العينات الثلاثة مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه

$H_1 :$ هناك على الأقل عينة واحدة مسحوبة من مجتمع تباينه يختلف عن (σ^2)

❖ نجد معلومات الجدول التالي:

العينة	n_i	n_i-1	$\frac{1}{n_i-1}$	S_i^2	InS_i^2	$(n_i-1)InS_i^2$	$(n_i-1)S_i^2$
1	20	19	0.052632	0.03	-3.506557897	-66.62460004	0.57
2	25	24	0.0416667	0.04	-3.218875825	-77.2530198	0.96
3	28	27	0.0357143	0.05	-2.995732274	-80.88477139	1.35
		70	0.130013			-224.7623912	2.88

$$S_P^2 = \frac{2.88}{70} = 0.041142857$$

$$InS_P^2 = -3.190704948$$

نحسب إحصاء الاختبار:

$$\chi^2 = \frac{(70)(-3.190704948) - (-224.7623912)}{1+\frac{1}{3(2)}\left(0.130013-\frac{1}{70}\right)}$$

$\chi^2 = 1.386305936$ المحسوبة

ومن جداول توزيع مربع كاي عند درجة حرية $(k\text{-}1 = 3\text{-}1 = 2)$ ومستوى معنوية (0.05) تكون القيمة الجدولية:

$$\chi^2_{(0.05/2)} = 5.99147$$

وبما أن قيمة مربع كاي المحسوبة أصغر من القيمة الجدولية تقبل (H_0) أي أن العينات الثلاثة مسحوبة من مجتمع طبيعي واحد تباينه (σ^2) ولا توجد اختلافات جوهرية بين تباينات هذه العينات.

7-4 اختبار الفرق بين انحرافين معياريين لمجتمعين طبيعيين تباينهما مجهول:

لو سحبنا عينة عشوائية بحجم (n_1) من مجتمع تباينه (σ_1^2) مجهول، وحسبنا الانحراف المعياري للعينة وكان (S_1). وسحبنا عينة بحجم (n_2) من مجتمع طبيعي آخر مستقل عن المجتمع الأول تباينه (σ_2^2) مجهول، وحسبنا الانحراف المعياري للعينة الثانية وكان (S_2) ولاختبار تجانس الانحراف المعياري للمجتمعين تحت فرضية العدم التالية:

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \qquad \text{or} \qquad \sigma_1 - \sigma_2 = 0$$

ضد الفرضية البديلة:

$$H_1 : \sigma_1 - \sigma_2 \neq 0$$

$$\text{or} \quad \sigma_1 - \sigma_2 > 0$$

$$\text{or} \quad \sigma_1 - \sigma_2 < 0$$

يكون معيار أو إحصاءة الاختبار:

$$Z = \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{2n_1} + \frac{S_2^2}{2n_2}}} \qquad \text{.........(7-7)}$$

وهو يتوزع توزيع طبيعي قياسي.

مثال (5.7):

لدراسة الاختلافات التي تحدث بين معملين ينتجان علب ملح الطعام تابعان لنفس الشركة سحبت عينة من المعمل الأول بحجم (40) علبة وتم حساب الانحراف المعياري لأوزانها فكان (5) غم، وسحبت عينة بحجم (45) علبة من المعمل الثاني فكان الانحراف المعياري لأوزانها (4) غم. هل أن المعملين متجانسا التباين في الإنتاج عند مستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات الاختبار:

$$H_0 : \sigma_1 - \sigma_2 = 0$$
$$H_1 : \sigma_1 - \sigma_2 \neq 0$$

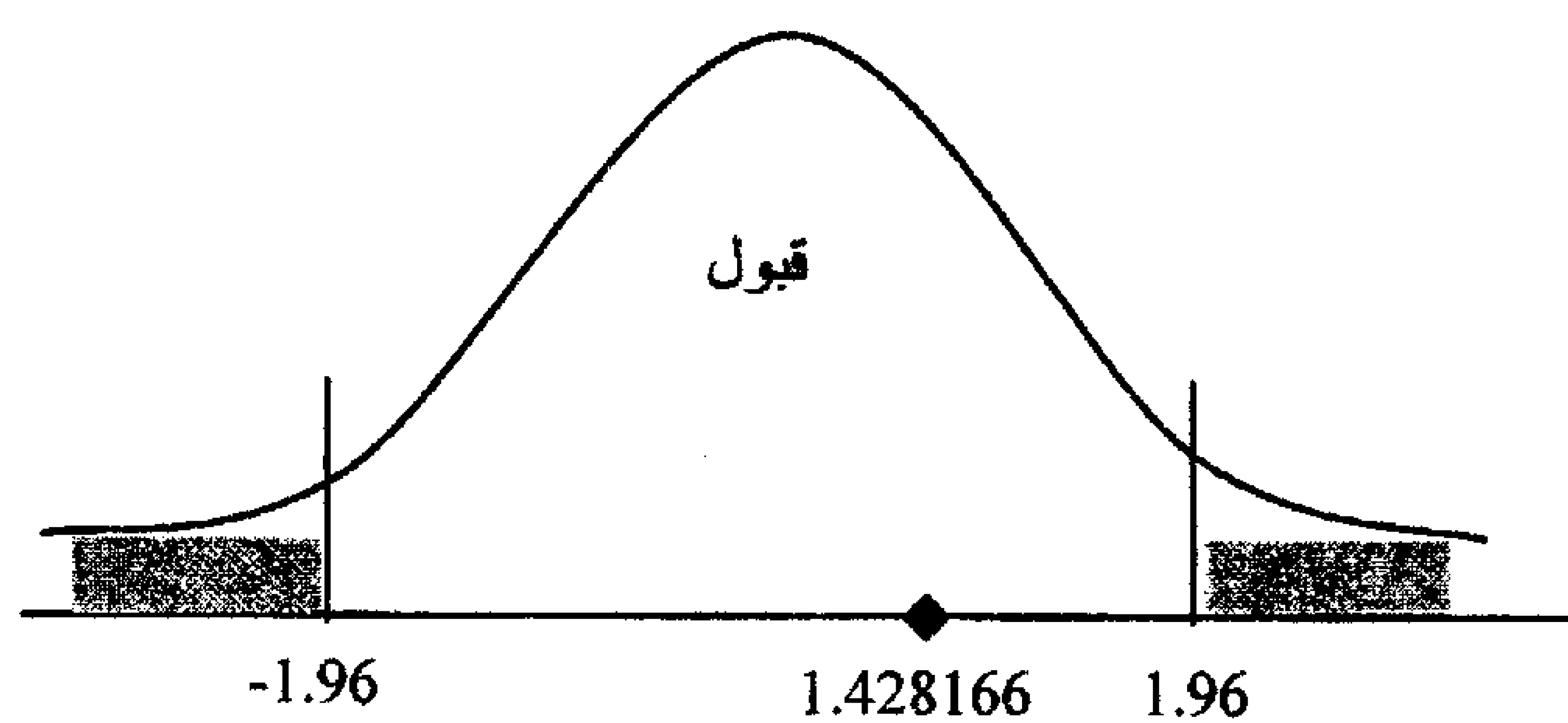
❖ معيار أو إحصاءة الاختبار:

$$Z = \frac{5 - 4}{\sqrt{\frac{25}{80} + \frac{16}{90}}} = 1.428166$$

❖ (Z) الجدولية هي:

$$Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

❖ المناطق والقيم الحرجة موضحة بالشكل التالي:



وبما أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة القبول تقبل (H_0) وأن المعملين متجانسين من حيث الانحراف المعياري أو التباين في الإنتاج.

أمثلة محلولة

مثال (6.7):

مصنع للحليب المجفف ينتج أكياساً من الحليب المجفف يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط (900) غم للكيس وبانحراف معياري مقداره (5) غم وللتأكد من أن المصنع ما زال محافظاً على نمط الإنتاج ولم يختلف الانحراف المعياري للإنتاج عن (5) غم سحبت عينة بحجم (61) كيس من الإنتاج فوجد أن الانحراف المعياري في أوزان الأكياس لهذه العينة (6) غم هل تعتقد بأن إنتاج المصنع لا زال ضمن الضوابط القياسية عند مستوى معنوية (0.01).

الحل:

❖ فرضيات البحث:

$$H_0 : \sigma^2 \leq 25$$
$$H_1 : \sigma^2 > 25$$

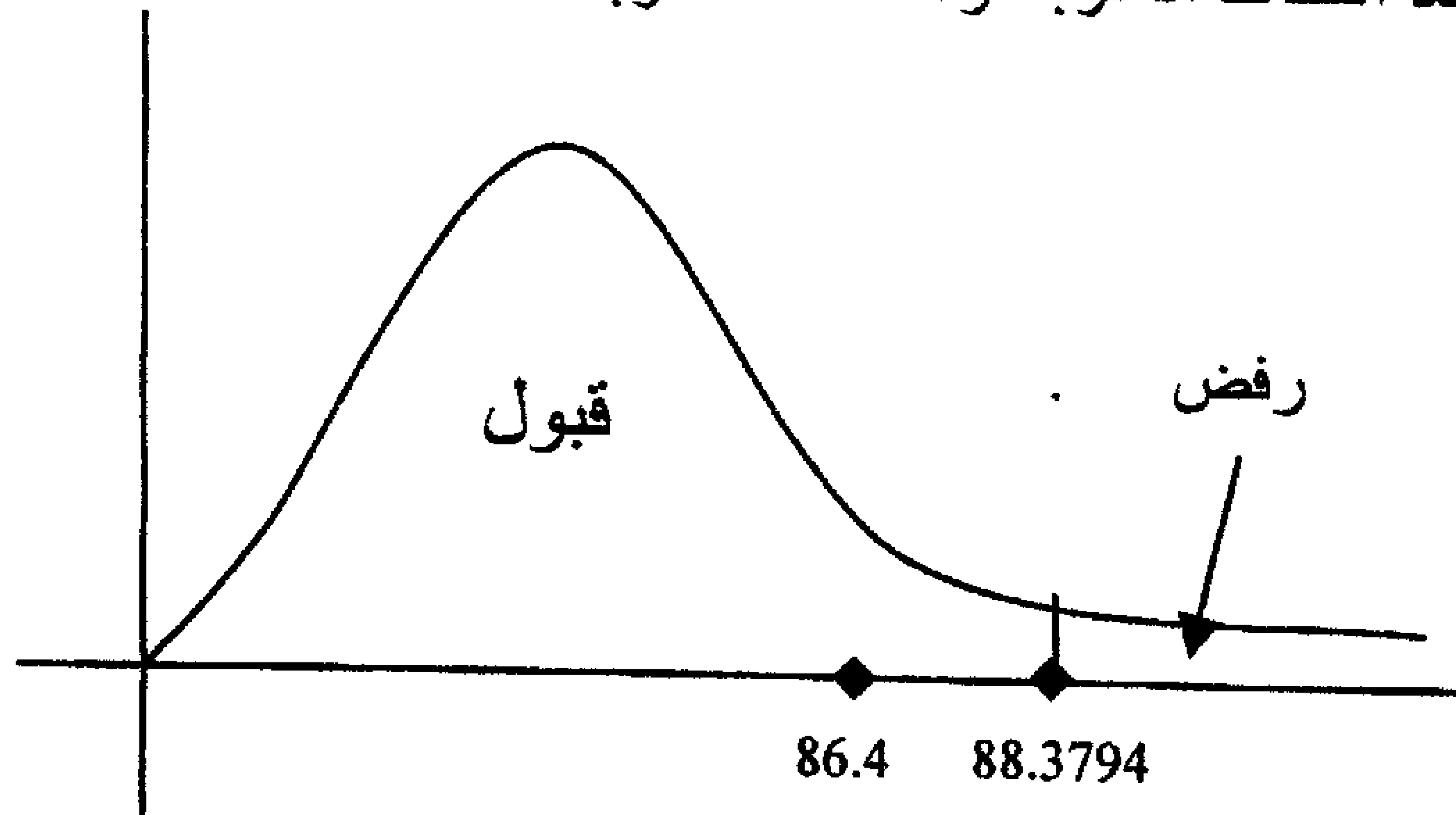
❖ معيار الاختبار:

$$\chi^2 = \frac{(61-1)(36)}{25} = 86.4$$

❖ نجد قيمة مربع كاي الجدولية لمستوى معنوية 0.01 ودرجة حرية (60):

$$\chi^2_{0.01,60} = 88.3794$$

❖ نجد النقاط الحرجة والمساحة الحرجة:



❖ **القرار**: بما أن قيمة مربع كاي المحسوبة (86.4) وقعت في منطقة القبول لذا تقبل H_0 وأن الانحراف المعياري في الإنتاج لا يزيد عن 5.

مثال (7.7):

لقياس الفروق في التباين في الإنتاج لمعملين من معامل الشركة سحبت عينة من المعمل الأول لـ(16) يوم فكان التباين في عدد الوحدات المنتجة يومياً (5) وحدة وسحبت عينة لنفس الأيام من المعمل الثاني فكان التباين في الإنتاج (3) وحدة هل تعتقد أن هناك فروق جوهرية في تباين المعملين عند مستوى معنوية 5٪.

الحل:

❖ فرضيات الاختبار:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

❖ معيار أو إحصاءة الاختبار:

$$F = \frac{5}{3} = 1.667$$

❖ (F) الجدولية بمستوى معنوية $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ أي (0.025) ودرجة حرية (15) للبسط و(15) للمقام هي:

$$F_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} = F_{0.25,15,15} = 2.86$$

❖ **القرار**: بما أن قيمة (F) المحسوبة أقل من قيمة (F) الجدولية تقبل (H_0) أي أن التباين لكلا المعملين متساوي عند مستوى معنوية 5٪.

مثال (8.7):

لقياس التغير في حجم الطلب على السلعة في المواسم الأربعة للسنة كان التباين في حجم الطلب (50) وحدة يومياً في الموسم الأول أما في الموسم الثاني فقد كان (30) وحدة وفي الموسم الثالث (10) وحدات وفي الرابع (20) وحدة. علماً

أنه تم قياس التباين لفترة (30) يوم في كل موسم. هل تعتقد أن العينات الأربعة المسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه σ^2؟ اختبر بمستوى 5٪.

الحل:

❖ فرضيات البحث هي:

$H_0 : \sigma^2$ إن العينات الأربعة مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه

$H_1 :$ هناك على الأقل عينة واحدة مسحوبة من مجتمع تباينه مختلف

❖ نجد معلومات الجدول التالي:

العينة	n_i	n_i-1	$\frac{1}{n_i - 1}$	S_i^2	InS_i^2	$(n_i - 1)InS_i^2$	$(n_i - 1)S_i^2$
1	30	29	0.03448	50	3.9120230	113.448667	1450
2	30	29	0.03448	50	3.4011974	98.6347246	870
3	30	29	0.03448	10	2.3025851	66.7749679	290
4	30	29	0.03448	20	2.995732	86.876236	580
		116	0.13792			365.7345955	3190

$$S_P^2 = \frac{3190}{116} = 27.5$$

$$InS_P^2 = 3.314186005$$

$$\chi^2 = \frac{116(3.314186005) - (365.7345955)}{1 + \frac{1}{4(3)}\left(0.13792 - \frac{1}{116}\right)}$$

$$\chi^2 = 18.5115205$$

من جداول توزيع مربع كاي عند درجة حرية (k-1 = 4-1 = 3) ومستوى معنوية (0.05) تكون القيمة الجدولية:

$$\chi^2_{0.05,3} = 7.81473$$

❖ **القرار:** بما أن قيمة مربع كاي المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية ترفض (H_0) أي أن العينات الأربعة لم تأخذ من مجتمع طبيعي واحد وأن أحد التباينات على الأقل مختلف عن الأخريات. وهذا يعني أن مستوى الطلب متباين من فصل لآخر.

مثال (9.7):

لدراسة الاختلافات في خطين إنتاجيين لنفس المعمل سحبت عينة بحجم (50) منتج من الخط الإنتاجي الأول فكان الانحراف المعياري في وزن العلبة المنتجة (6) غم وسحبت عينة بحجم (45) منتج من الخط الإنتاجي الثاني فكان الانحراف المعياري في وزن العلبة المنتجة (4) غم. هل تعتقد أن خطي الإنتاج في المعمل متجانس التباين في الإنتاج اختبر بمستوى معنوية 5٪.

الحل:

❖ فرضيات الاختبار:

$$H_0 : \sigma_1 - \sigma_2 = 0$$
$$H_1 : \sigma_1 - \sigma_2 \neq 0$$

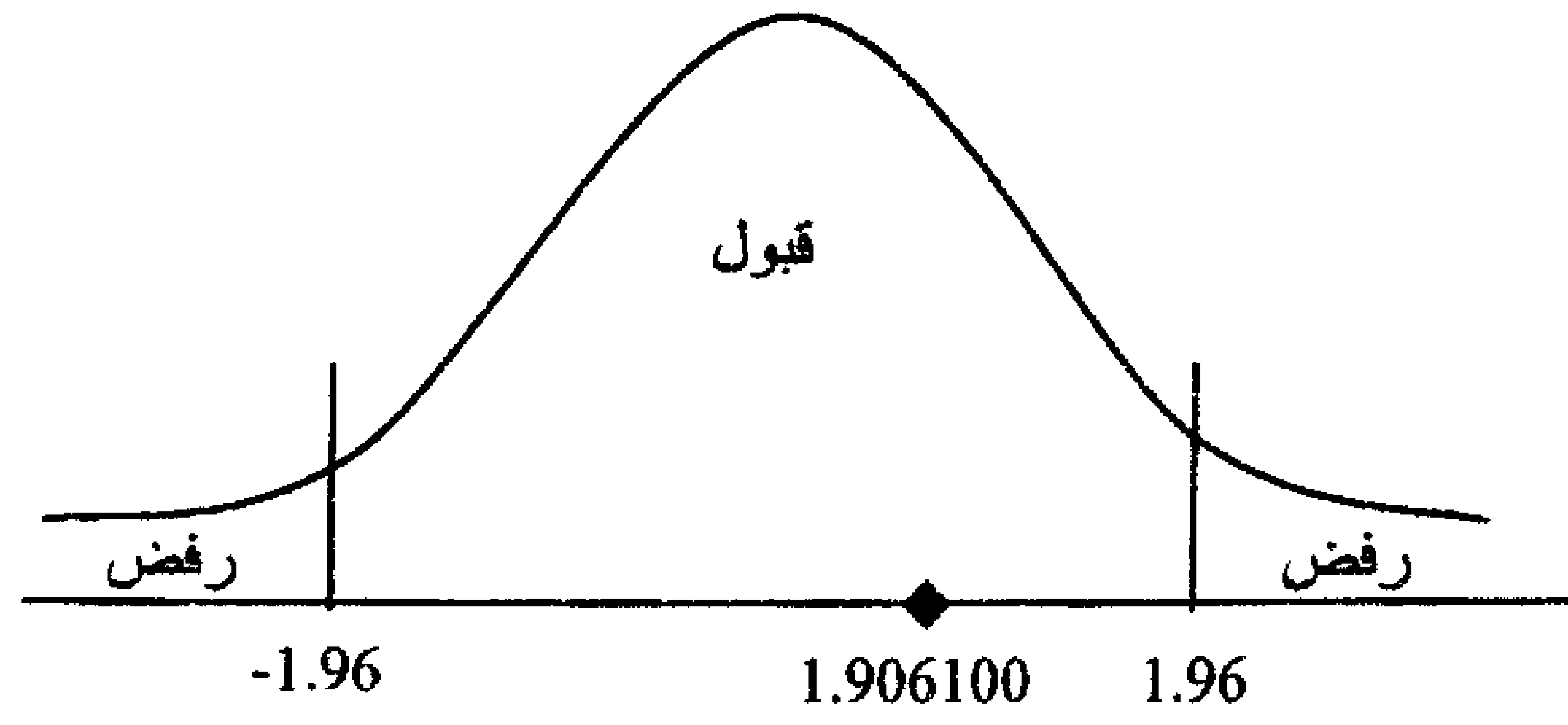
❖ معيار الاختبار:

$$Z = \frac{6 - 4}{\sqrt{\frac{36}{50} + \frac{16}{45}}} = 1.906100$$

❖ (Z) الجدولية هي:

$$Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

❖ النقاط الحرجة والمساحة الحرجة:



❖ القرار: بما أن (Z) المحسوبة وقعت في منطقة القبول (لاحظ الشكل) تقبل (H_0) وأن المعمل متجانس التباين في خطي الإنتاج.

أسئلة الفصل السابع

1) مصنع ينتج علباً للفواكه المجففة وأن المنتج يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط علبة مقداره (200) غم وبانحراف معياري مقداره (2) غم وبعد فترة أرادت إدارة المصنع التأكد من الإنتاج لازال ينتج بنفس المواصفات قامت بسحب عينة بحجم (50) علبة فوجدت أن الانحراف المعياري في وزن العلبة هو (4) غم هل تعتقد أن الإنتاج فعلاً ضمن الضوابط القياسية من حيث الانحراف المعياري في الإنتاج، اختبر بمستوى معنوية 5٪.

2) لقياس الفرق في التباين في عدد التوقفات في نوعين من مكائن الخياطة، سحبت عينة بحجم (20) ماكنة من النوع الأول فكان التباين في عدد التوقفات في الماكنة (2) مرة باليوم وسحبت عينة بحجم (25) ماكنة من النوع الثاني فكان التباين في عدد التوقفات في الماكنة (1) مرة يومياً هل تعتقد أن هناك اختلافات جوهرية في تباين النوعين في المكائن، اختبر بمستوى معنوية 1٪.

3) لثلاثة معامل تنتج نفس النوع سحبت عينة بحجم (20) منتج من المعمل الأول فكان التباين في وزن العلبة (5) غم وعينة بحجم (25) منتج من المعمل الثاني فكان التباين في وزن العلبة (4) غم وعينة بحجم (28) منتج من المعمل الثالث فكان التباين في وزن العلبة (3) غم، هل تعتقد أن العينات الثلاثة مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه σ^2؟ اختبر بمستوى معنوية 1٪.

4) لدراسة مقدار التباين في أداء نوعين في العمال النوع الأول قد مر بدورة تدريبية حول الإنتاج والنوع الثاني له خبرة في الإنتاج دون انخراطه بالدورات التدريبية، سحبت عينة بحجم (50) عامل قد خضع للتدريب فكان الانحراف المعياري لإنتاج اليومي (2) وحدة وسحبت عينة بحجم (48) عامل من النوع الثاني فكان الانحراف المعياري لإنتاجه اليومي (4) وحدة هل تعتقد أن النوعين من العمال متجانسي التباين في الإنتاجية، اختبر بمستوى معنوية 1٪.

الفصل الثامن

اختبارات تتعلق بالارتباط

الفصل الثامن

اختبارات تتعلق بالارتباط

سنتناول في هذا الفصل اختبارات تتعلق بمعامل الارتباط ومعنوية قيمة معامل الارتباط، ومن هذه الاختبارات:

8-1 اختبار معنوية معامل الارتباط الخطي البسيط:

لنفرض أن (r_{xy}) معامل ارتباط بين ظاهرتين قد حسب من عينتين حجم الأولى (n_1) وتمثل الظاهرة الأولى وحجم الثانية (n_2) وتمثل الظاهرة الثانية ولنفترض أنهما سحبتا من مجتمع طبيعي ثنائي ولاختبار الفرضية:

$H_0 : \rho = 0$

أي لا توجد علاقة بين الظاهرتين في هذا المجتمع.

ضد أي فرضية بديلة أخرى فإن معيار الاختبار هو:

أ) في حالة العينات الكبيرة:

$$Z = \frac{r-\rho}{\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n-1}}} \qquad ....(8-1)$$

$$Z = r \cdot \sqrt{n-1} \qquad \text{أو} \qquad ....(8-2)$$

و(Z) هنا تتوزع توزيع طبيعي قياسي بمتوسط يساوي (صفر) وانحراف معياري يساوي (1).

ب) في حالة العينات الصغيرة:

معيار الاختبار في هذه الحالة:

$$t = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} \qquad ....(8-3)$$

و(t) هنا تتوزع توزيع (t) بمستوى معنوية محدد ودرجة حرية (n-2).

مثال (1.8):

لدراسة العلاقة بين حجم القروض وسعر الفائدة في أحد البنوك كان معامل الارتباط الخطي (0.95) محسوب لعينة حجمها (50) مقترض في هذا البنك. هل يمكن أن نفترض أنه لا توجد علاقة بين سعر الفائدة وحجم القروض عند مستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات البحث:

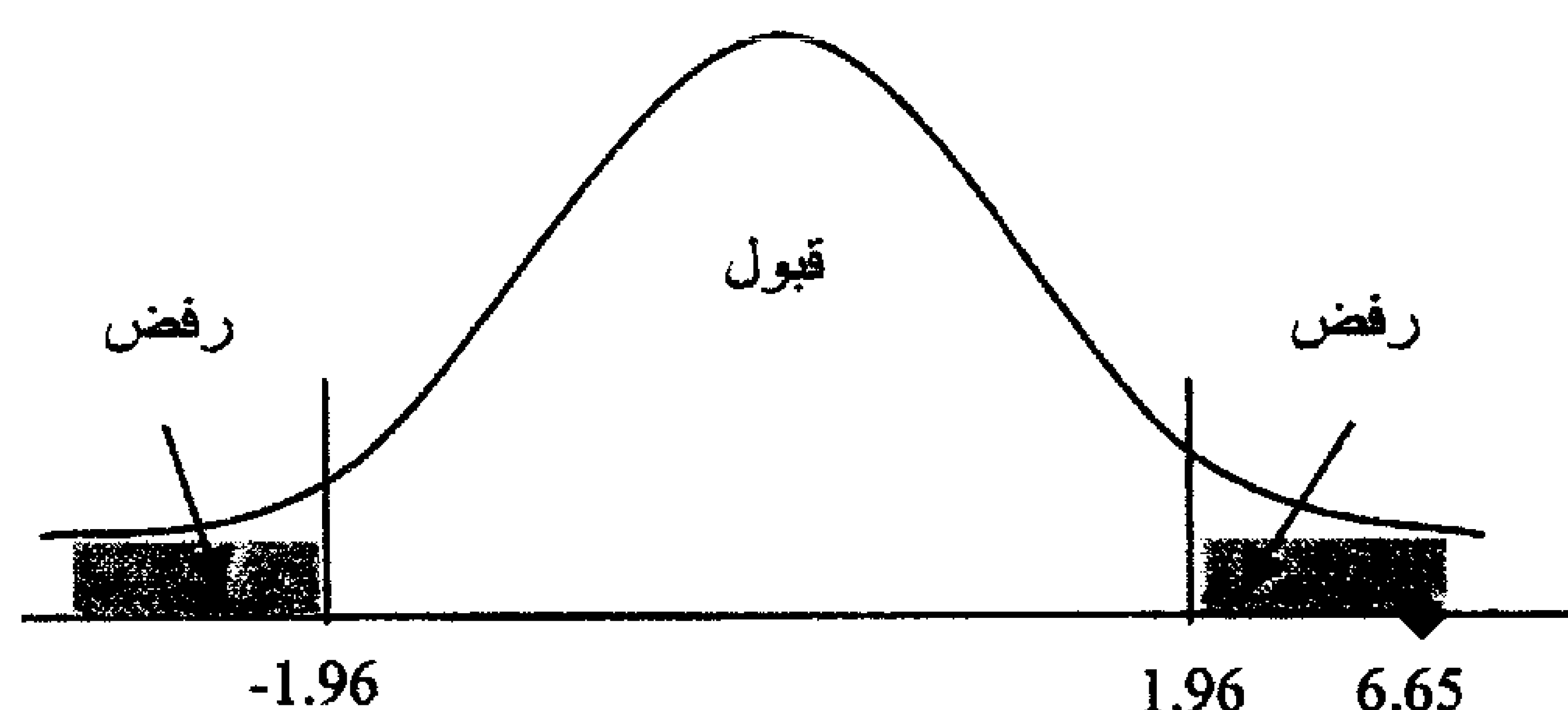
$H_0 : \rho = 0$
$H_1 : \rho \neq 0$

❖ معيار الاختبار:

$$Z = 0.95\sqrt{50-1} = 6.65$$

❖ نجد القيم الحرجة والمساحة الحرجة:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$



وبملاحظة أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة الرفض نرفض (H_0) أي أن العلاقة بين الظاهرتين لا تساوي (صفراً) عند مستوى معنوية (0.05).

مثال (2.8):

من سجلات (65) حادثة وجد أن معامل الارتباط البسيط بين عدد الحوادث التي وقعت للشخص وعمره مساوي إلى (0.7) هل تعتقد أنه هناك ارتباط خطي طردي (موجب) بين الظاهرتين عند مستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ في هذه الحالة: فرضيات البحث تصبح

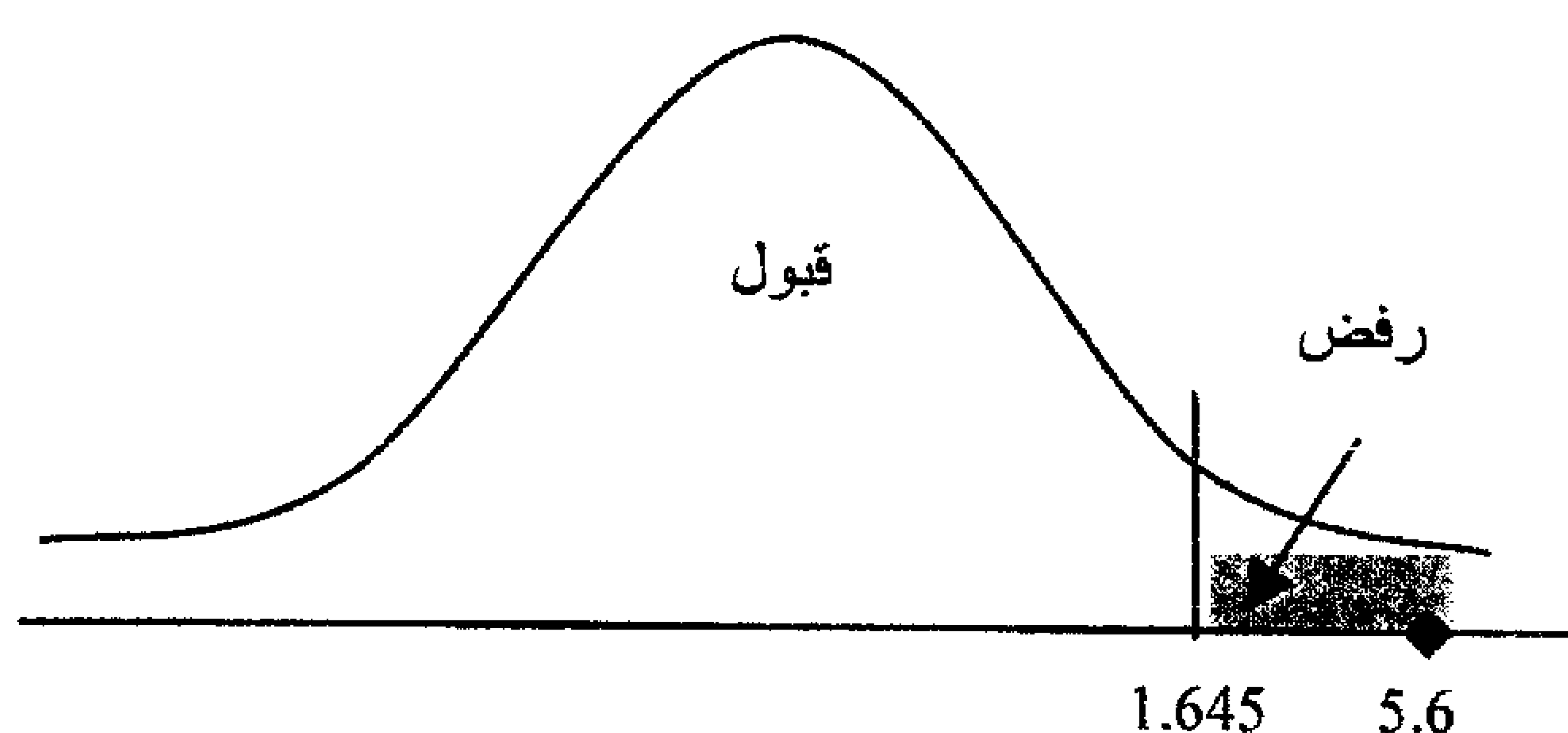
$H_0 : \rho = 0$
$H_1 : \rho > 0$

❖ نحسب معيار الاختبار:

$$Z = (0.7)\sqrt{65-1} = 5.6$$

❖ نجد القيم الحرجة والمساحة الحرجة:

$$Z_{\alpha} = Z_{0.05} = 1.645$$



بما أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة الرفض نرفض (H_0) أي أن العلاقة بين المتغيرين علاقة طردية (موجبة).

مثال (3.8):

في محفظة استثمارية حسب معامل الارتباط الخطي البسيط بين سعر سهمين في المحفظة لمدة (21) يوم فكان مساوي إلى (0.54-) هل تعتقد أن العلاقة بين السهمين هي علاقة قوية عكسية فعلاً عند مستوى معنوية (0.05).

الحل:

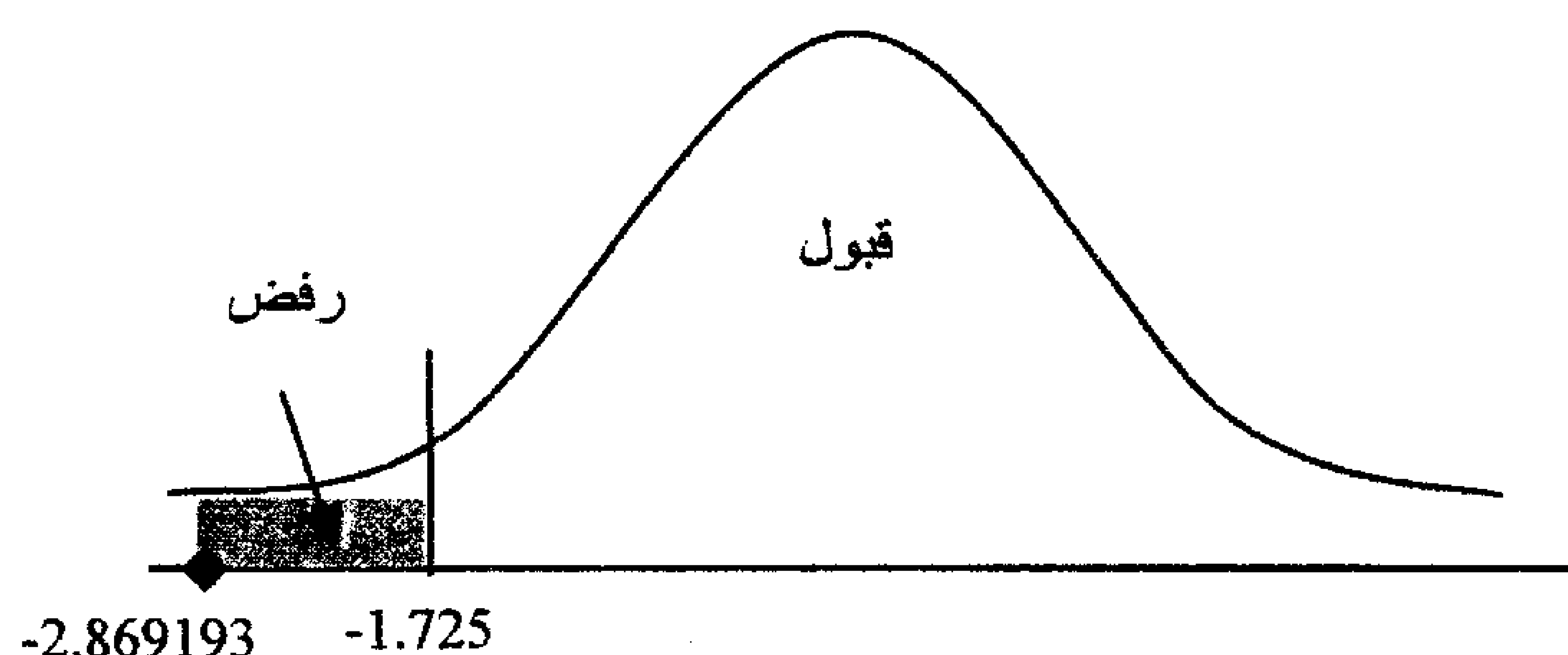
❖ فرضيات البحث:

$H_0 : \rho \geq 0.5$
$H_1 : \rho < -0.5$

$$t = \frac{-0.54\sqrt{22-2}}{\sqrt{1-(-0.54)^2}} = -2.869193$$

❖ نجد القيم الحرجة والمساحة الحرجة:

$$t_{\alpha,n-2} = t_{0.05,20} = 1.725$$



ولوقوع (t) المحسوبة في منطقة الرفض (لاحظ الشكل السابق) نرفض (H_0) ونقبل ($H_1 : \rho < 0.5$) أي أن العلاقة بين سعر السهمين علاقة عكسية قوية بمستوى معنوية (0.05).

2-8 اختبار معنوية معامل الارتباط الخطي البسيط:

إذا كان (r_{xy}) معامل الارتباط الخطي البسيط المحسوب لمتغيرين هما (x) و(y) مأخوذين من عينة عشوائية حجمها (n) وكان (ρ) معامل الارتباط الخطي البسيط بين (x) و(y) لمجتمع الدراسة.

إذا أردنا اختبار أن معامل الارتباط بين المتغيرين يساوي قيمة معينة (محددة مسبقاً)، فإن:

❖ فرضية العدم تصبح:

$$H_0 : \rho = \rho_0$$

حيث أن (ρ_0) قيمة لمعامل الارتباط بين المتغيرين لا تساوي صفراً.

❖ معيار الاختبار:

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}} \qquad \text{..........(8-4)}$$

حيث أن:

$$Z_1 = \frac{1}{2} In \frac{1- r}{1- r}$$

$$\text{..........(8-5)}$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} In \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$$

مثال (4.8):

أجريت دراسة بين كمية الأمطار الهاطلة في الأردن وكمية إنتاج الزيتون للسنوات الخمسين الماضي فوجد أن معامل الارتباط الخطي البسيط بين الظاهرتين كان مساوي إلى (0.80). هل تعتقد أن معامل الارتباط بين الظاهرتين عبر جميع السنوات هو (0.6) اختبر بمستوى معنوية (0.05)؟

الحل:

❖ فرضيات البحث:

$$H_0 : \rho = 0.6$$
$$H_1 : \rho \neq 0.6$$

❖ نحسب معيار الاختبار:

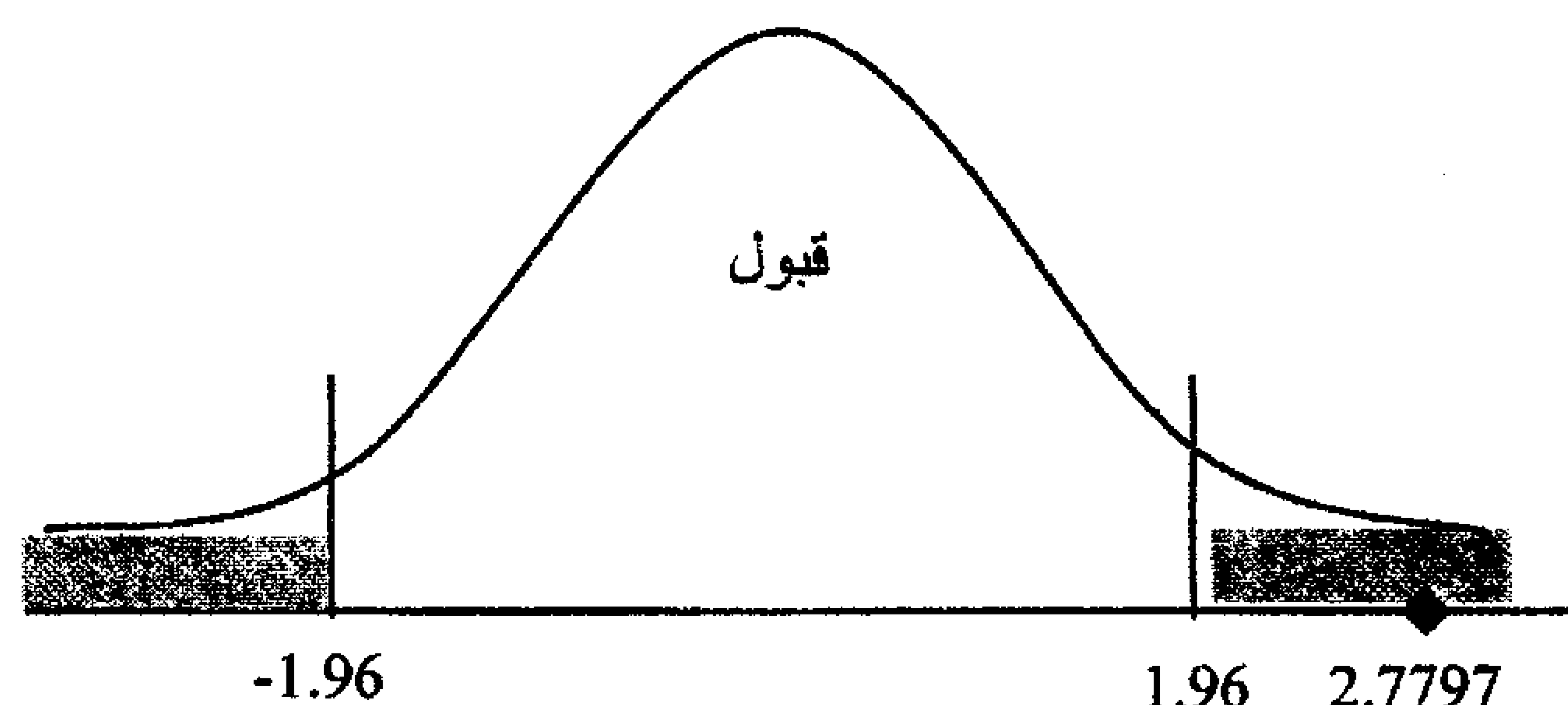
$$Z_1 = \frac{1}{2} In \frac{1- 0.80}{1- 0.80} = 1.098612289$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} In \frac{1+ 0.6}{1- 0.6} = 0.6931471806$$

$$Z = \frac{1.098612289 - 0.6931471806}{\sqrt{\frac{1}{50-3}}} = 2.7797$$

❖ نحسب القيم الحرجة والمناطق الحرجة:

$Z_{0.025} = 1.96$



ولوقوع قيمة (Z) المحسوبة في منطقة الرفض، نرفض (H_0) أي أن قيمة معامل الارتباط بين الظاهرتين لا تساوي (0.6) لهذه الظاهرتين عبر جميع السنوات.

3-8 اختبار الفرق بين معاملي ارتباط:

إذا كان (r_1) معامل ارتباط محسوب من عينة عشوائية بحجم (n_1) محسوبة من مجتمع معامل ارتباطه (ρ_1) و(r_2) معامل ارتباط محسوبة من عينة عشوائية بحجم (n_2) مسحوبة من مجتمع معامل ارتباطه (ρ_2) وبغرض أن العينتين مستقلتين وأردنا دراسة وجود فروق معنوية بين معامل الارتباط لكلا المجتمعين فإن فرضية الاختبار ستكون بالشكل التالي:

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 \qquad \rho_1 - \rho_2 = 0$

ضد أحد الفرضيات البديلة التالية:

$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2 \qquad \rho_1 - \rho_2 \neq 0$

or $\quad H_1 : \rho_1 > \rho_2 \qquad \rho_1 - \rho_2 > 0$

or $\quad H_1 : \rho_1 < \rho_2 \qquad \rho_1 - \rho_2 < 0$

أما معيار الاختبار فسيكون بالشكل التالي:

$$Z = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}} \quad ....(8\text{-}6)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} In \frac{1 + r_1}{1 - r_1}$$

$$..........(8\text{-}7)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} In \frac{1 + r_2}{1 - r_2}$$

مثال (5.8):

حسب معامل الارتباط بين ظاهرة التدخين والإصابة بمرض صعوبة التنفس لعينة حجمها (81) رجلاً فوجد أن معامل الارتباط الخطي البسيط مساوٍ إلى (0.60) فيما سحبت عينة حجمها (70) امرأة لدراسة نفس الظاهرة فوجد أن معامل الارتباط مساوٍ إلى (065) هل تعتقد أن هاتين العينتين مختارتين من مجتمعين يمتلكان نفس معامل الارتباط بين ظاهرة التدخين والإصابة بالمرض. اختبر بمستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات البحث:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 \qquad \rho_1 - \rho_2 = 0$$
$$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2 \qquad \rho_1 - \rho_2 \neq 0$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} In \frac{1 + 0.6}{1 - 0.6} = 0.6931471806$$

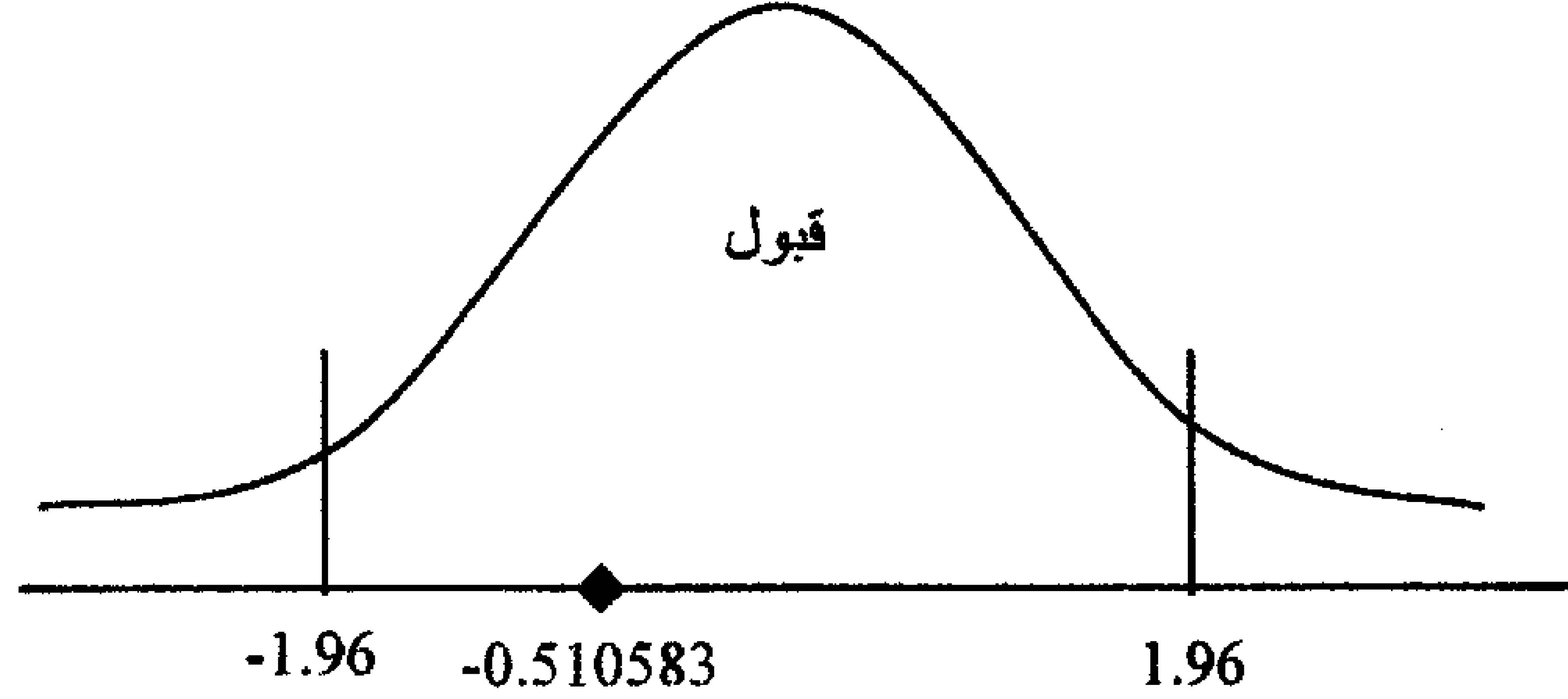
$$\gamma_2 = \frac{1}{2} In \frac{1 + 0.65}{1 - 0.65} = 0.7752987062$$

❖ نجد معيار الاختبار:

$$Z = \frac{0.6931471806 - 0.7752987062}{\sqrt{\frac{1}{81 - 3} + \frac{1}{70 - 3}}} = -0.510583$$

❖ نجد القيم الحرجة والمساحة الحرجة:

$$Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$



❖ القرار: بما أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة القبول لذا تقبل (H_0) أي أن العينتين مأخوذتين من مجتمعين لهما نفس معامل الارتباط بين ظاهرة التدخين والإصابة بمرض صعوبة التنفس.

4-8 اختبار تجانس عدة معاملات ارتباط بسيطة:

افرض أن لدينا (K) من العينات وحسب كل عينة معامل ارتباط وليكن (r_i) (حيث أن $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$) وكان هذا الارتباط تقديراً لمعامل ارتباط المجتمع المسحوبة منه العينة والمساوي إلى (P_i) بين ظاهرتين مدروستين هما (y,x).

لو كنا بصدد اختبار أن (r_i) هي تقديرات متجانسة (أي متساوية وتساوي P) فإن فرضيات الاختبار الملائمة في هذه الحالة:

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 \ldots\ldots\ldots\ldots = \rho_k = \rho$

هذه الفرضية

$H_1 : \rho$ على الأقل أحد معاملات الارتباط لا يساوي

ومعيار الاختبار في هذه الحالة:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)(\gamma_i - \overline{Z})^2 \qquad \ldots\ldots\ldots(8\text{-}8)$$

والذي يتوزع توزيع مربع كاي بدرجة حرية (k-1) حيث أن:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)\ \gamma_i}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)} \qquad \text{.........(8-9)}$$

حيث أن:

$$\gamma_i = \frac{1}{2} In \frac{1 + r_i}{1 - r_i} \qquad \text{.........(8-10)}$$

مثال (6.8):

في دراسة العلاقة بين علامة الطالب في الامتحان الأول والامتحان الثاني تم سحب عينة من ثلاثة كليات من كليات إحدى الجامعات وحسب معامل الارتباط بين علامتي الطالب لهذه العينات وكالآتي:

	حجم العينة	معامل الارتباط
كلية A	60	0.7
كلية B	70	0.68
كلية C	65	0.69

هل يمكن القول أن معاملات الارتباط المحسوبة هي تقديرات متجانسة لمعامل ارتباط المجتمع بين هذين المتغيرين عند مستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات البحث:

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$

H_1 : على الأقل أحد معاملات الارتباط مختلف عن البقية

الكلية	n_i	r_i	n_i-3	γ_i	$(n_i-3)\ \gamma_i$	$(\gamma_i - \bar{Z})^2$	$(n_i-3)(\gamma_i - \bar{Z})^2$
A	60	0.7	57	0.867	49.419	0.000408	0.02326
B	70	0.68	67	0.829	55.543	0.000317	0.021239
C	65	0.69	62	0.8479	52.2698	0.00000121	0.00007502
			186		157.5138		0.04457402

$$\bar{Z} = \frac{157.5138}{186} = 0.8468$$

$$\chi^2 = 0.04457402$$

قيمة مربع كاي الجدولية بدرجة حرية (k-1) أي (3-1=2) تكون:

$$X^2_{0.05,2} = 5.991$$

ولما كانت قيمة مربع كاي المحسوبة أصغر من قيمة مربع كاي الجدولية فإننا نقبل فرضية العدم (H_0) أي أن العينات الثلاثة مسحوبة من مجتمعات ذات معامل ارتباط متساوي وتقديرات معاملات الارتباط هذه متجانسة عند مستوى معنوية (0.05).

5-8 اختبار معنوية معامل الانحدار:

لمعادلة الانحدار الخطي البسيط التالية:

$$Y = a + bx + e_i \qquad ....(8\text{-}11)$$

والتي يكون فيها المتغير (x) متغيراً مستقلاً يقاس أثره على المتغير (Y) التابع أو المعتمد من خلال تقدير معاملات معادلة الانحدار وكالآتي:

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad ....(8\text{-}12)$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} \qquad ....(8\text{-}13)$$

أما معادلة الانحدار التقديرية فهي:

$$\hat{Y} = \hat{a} - \hat{b}x \qquad ....(8\text{-}14)$$

ولاختبار معنوية معامل الانحدار $\left(\hat{b}\right)$ للفرضية الصفرية (العدم) التالية:

$H_0 : b = 0$

أي أننا بهدف اختبار الفرضية القائلة أنه لا يوجد أثر للمتغير المستقل (X) على المتغير المعتمد (Y) يكون معيار أو إحصاءة الاختبار:

$$t = \frac{\hat{b}}{S.E\left(\hat{b}\right)} \quad ....(8\text{-}15)$$

حيث أن:

$$S.E\left(\hat{b}\right) = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{(n-2)\sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad ....(8\text{-}16)$$

$$= \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y})^2}{(n-2)\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

أما إذا كان الاختبار بصدد أن تكون قيمة معامل الانحدار (b) تساوي قيمة معينة غير مساوية للصفر ولتكن (b_0) فإن إحصاء أو معيار الاختبار سيكون:

$$t = \frac{\hat{b} - b_0}{S.E\left(\hat{b}\right)} \quad ....(8\text{-}17)$$

وقيمة (t) هنا تتوزع توزيع (t) بمستوى معنوية معلوم ودرجات حرية مساوية إلى (t-2).

مثال (7.8):

البيانات التالية تمثل قيم الدخل اليومي (بالدينار) (X) والإنفاق اليومي (بالدينار) (Y) لعشرة أشخاص. المطلوب اختبار الفرضية هل يوجد أثر للدخل على الإنفاق.

X	Y	Xy	X^2	Y^2	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y-\hat{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$
10	8	80	100	64	7.7114	0.2886	0.08328996	1	1
20	15	300	400	255	14.8252	0.1748	0.03055504	11	121
15	10	150	225	100	11.2683	-1.2683	1.60858489	6	36
8	7	56	64	49	6.28864	0.71136	0.50603305	-1	1
2	2	4	4	4	2.02036	-0.02036	0.0004145296	-7	49
5	4	20	25	16	4.1545	-0.1545	0.02387025	-4	16
7	6	42	49	36	5.57726	0.42276	0.1787091076	-2	4
8	6	48	64	36	6.28864	-0.28864	0.0833130496	-1	1
5	3	15	25	9	4.1545	-1.1545	1.33287025	-4	16
10	9	90	100	81	7.71545	1.28455	1.650068703	1	1
90	70	805	1056	620			5.497708829		246

❖ فرضية البحث:

$$H_0 = b = 0$$
$$H_1 = b \neq 0$$

$$\bar{X} = \frac{90}{10} = 9$$

$$\bar{X}^2 = 81$$

$$\bar{Y} = \frac{70}{10} = 7$$

$$\bar{Y}^2 = 79$$

$$\hat{b} = \frac{805-(10)(9)(7)}{1056-(10)(81)} = \frac{175}{246} = 0.71138$$

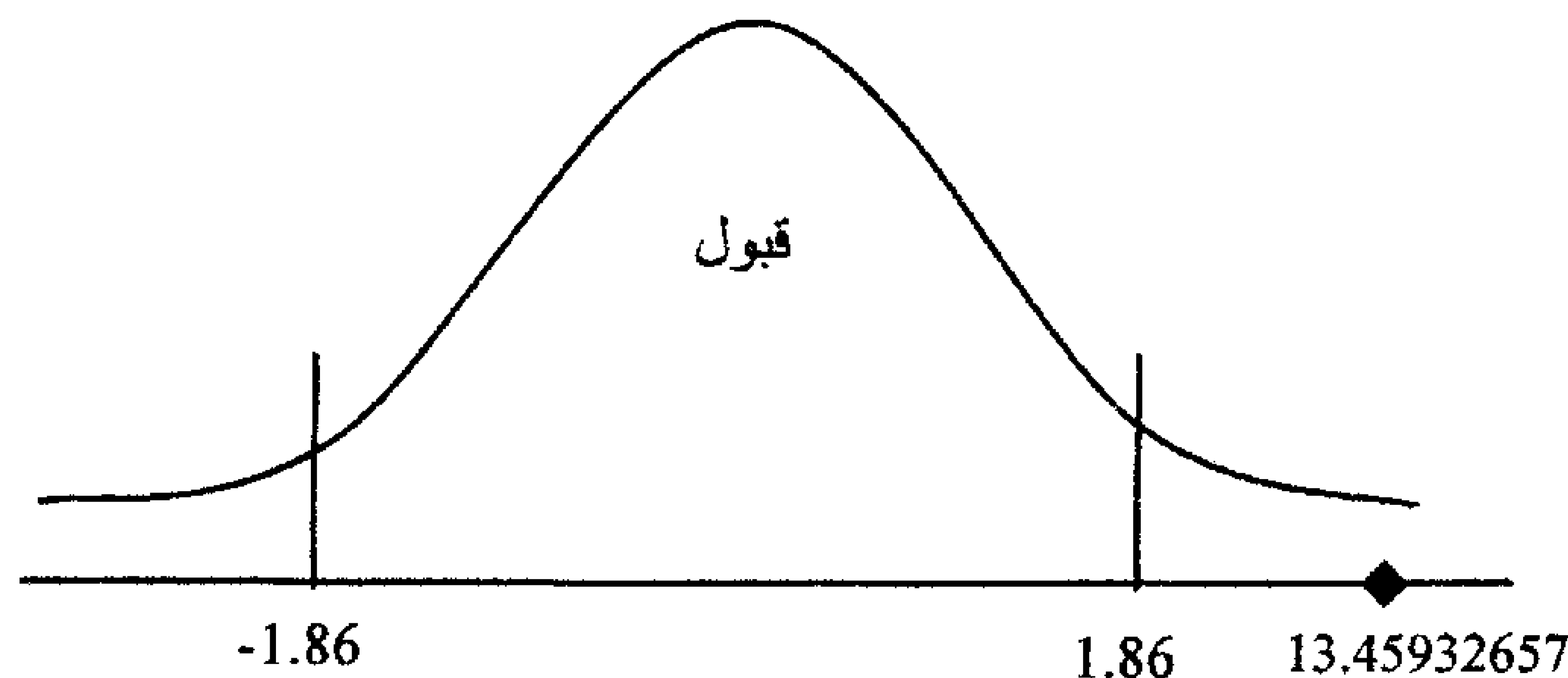
$$\hat{a} = 7-(0.71138)(9) = 0.5976$$

$$\hat{Y}_i = 0.5976 + 0.71138X_i$$

$$S_E\ \hat{b} = \sqrt{\frac{5.497708829}{(10-2)(246)}} = 0.05285405599$$

$$t = \frac{0.71138}{0.05285405599} = 13.45932657$$

ومن جداول (t) عند درجة حرية (8) ومستوى معنوية (0.05) تكون القيمة الجدولية مساوية إلى (1.86) وبذلك فإن القيمة الحرجة والمنطقة الحرجة هي:



ومن ملاحظة قيمة (t) المحسوبة على الرسم أعلاه نجد أنها وقعت في منطقة الرفض وبذلك نرفض (H_0) ونقبل (H_1) أي أن ($b\neq0$) أي أن هناك أثر للمتغير المستقل (X) الذي يمثل الدخل اليومي على المتغير (Y) الذي يمثل الإنفاق اليومي.

مثال (8.8):

للمثال السابق اختبر الفرضية أن على الأقل نصف الدخل اليومي يذهب للإنفاق اليومي.

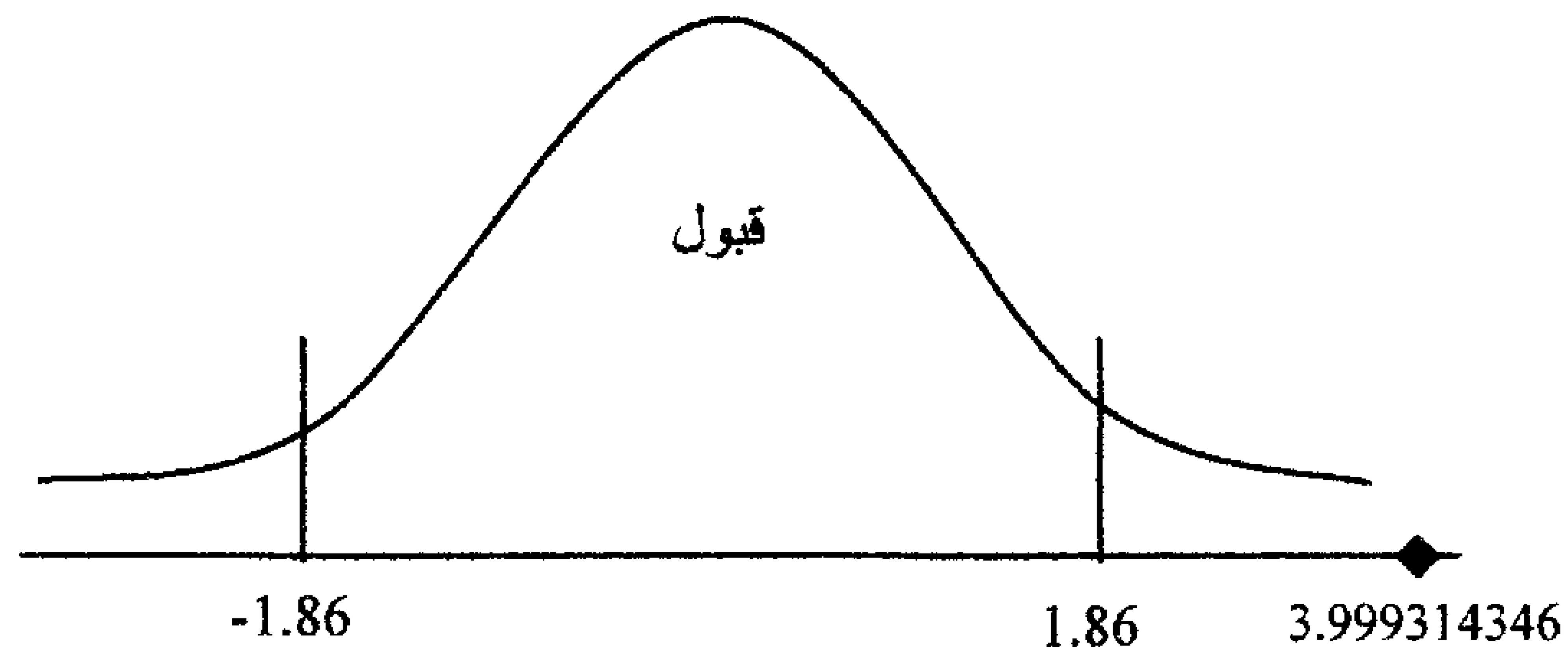
الحل:

❖ فرضيات البحث ستصبح كالآتي:

$$H_0 : b \geq 0.5$$
$$H_1 : b < 0.5$$

$$t = \frac{0.71138 - 0.5}{0.0528540599} = 3.999314346$$

وبذلك يمكن ملاحظة قيمة (t) المحسوبة بالنسبة للقيمة الحرجة والمنطقة الحرجة.



ومن ملاحظة الشكل السابق نجد أن قيمة (t) المحسوبة وقعت في منطقة الرفض وبذلك نرفض (H_0) أي أن ليس نصف الدخل اليومي على الأقل يذهب إلى الإنفاق اليومي.

أمثلة محلولة

مثال (9.8):

عند دراسة العلاقة بين عدد الوحدات الصالحة بالإنتاج وعمر الماكنة في أحد معامل المشروبات الغازية كان معامل الارتباط مساوي إلى (-0.3) محسوب من عينة حجمها (17) سنة.

هل تعتقد أن العلاقة بين الإنتاج وعمر الماكنة علاقة عكسية ضعيفة فعلاً؟ اختبر مستوى معنوية 5٪.

الحل:

❖ فرضيات البحث:

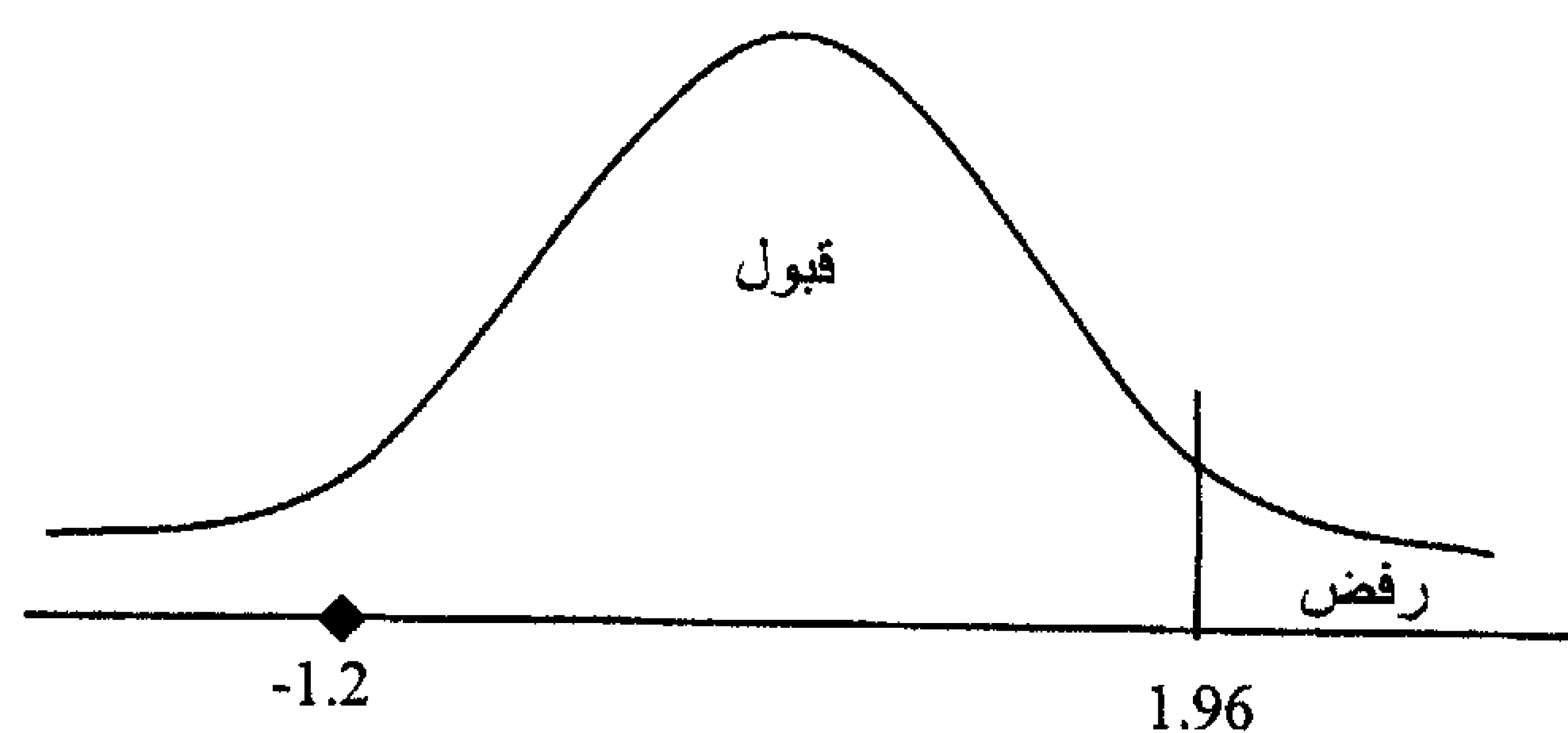
$H_0 : \rho \leq -0.5$
$H_1 : \rho > -0.5$

❖ نجد معيار الاختبار:

$$Z = -0.3\sqrt{17-1} = -1.2$$

❖ نجد القيم الحرجة والمساحة الحرجة:

$$Z_{0.05} = 1.96$$



❖ القرار: بما أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة القبول نقبل (H_0) أي أن معامل الارتباط ضعيف والعلاقة بين المتغيرين عكسية.

مثال (10.8):

في بحث بين كمية السلعة المعروضة وسعر السلعة في أحد أسواق عمان وجد أن معامل الارتباط الخطي هو (0.7) لـ(75) يوم، هل تعتقد أن معامل الارتباط الخطي بين الكمية المعروضة والسعر هو ارتباط قوي طردي لا يقل عن (0.65)؟

الحل:

❖ فرضيات البحث:

$$H_0 : \rho \geq 0.65$$
$$H_1 : \rho < 0.65$$

❖ نحسب معيار الاختبار:

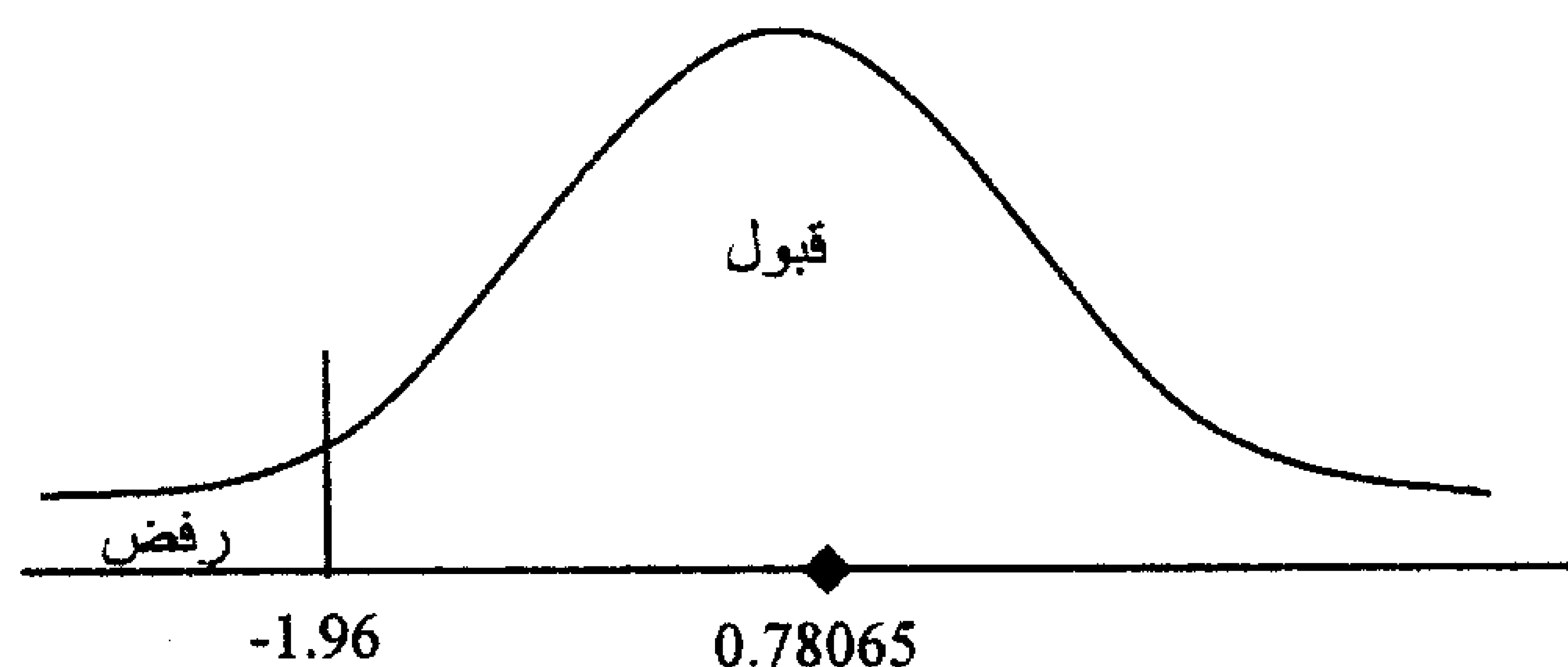
$$Z_1 = \frac{1}{2} In \frac{1+0.7}{1-0.7} = 0.8673$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} In \frac{1+0.65}{1-0.65} = 0.775299$$

$$Z = \frac{0.8673 - 0.775299}{\sqrt{\frac{1}{75-3}}} = \frac{0.092001}{0.11785113} = 0.78065$$

❖ نجد القيم الحرجة والمساحة الحرجة:

$$Z_{0.05} = 1.96$$



❖ **القرار:** بما أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة القبول تقبل (H_0) أي أن معامل ارتباط الكمية المعروضة والسعر طردي قوي أكبر من (0.65).

مثال (11.8):

أدخل (50) موظفاً من خريجي الكليات العلمية و(50) طالباً من خريجي الكليات الإنسانية لدورة مكثفة في الحاسوب فوجد أن الارتباط الخطي البسيط بين معدل التخرج في الكلية ومعدل التخرج من الدورة مساوي إلى (0.8) أما النوع الثاني من الموظفين فكان الارتباط هو (0.75) هل تعتقد أن هاتين العينتين قد تم اختيارهما من مجتمعين يمتلكان نفس الارتباط بين معدل التخرج من الكلية ومعدل التخرج من الدورة؟ اختبر بمستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات البحث:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 \qquad \rho_1 - \rho_2 = 0$$
$$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2 \qquad \rho_1 - \rho_2 \neq 0$$

❖ نجد معيار الاختبار:

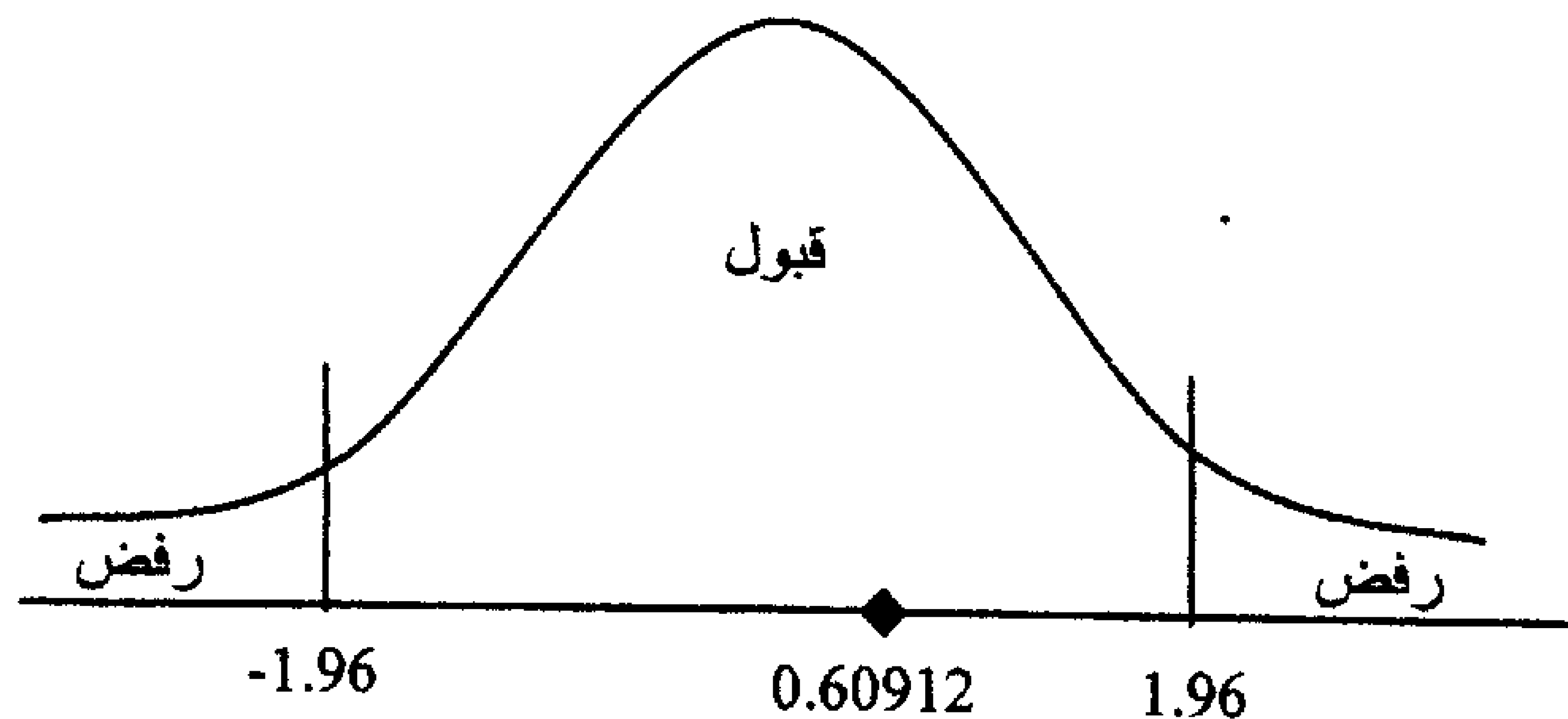
$$\gamma_1 = \frac{1}{2} In \frac{1+0.8}{1-0.8} = 1.098612$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} In \frac{1+0.75}{1-0.75} = 0.97296$$

$$Z = \frac{1.098612 - 0.97296}{\sqrt{\frac{1}{50-3} + \frac{1}{50-3}}} = \frac{0.125652}{0.206284249} = 0.60912$$

❖ نجد القيم الحرجة والمساحة الحرجة:

$$Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$



❖ **القرار:** بما أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة القبول تقبل (H_0) أي أن المجتمعين يمتلكان نفس معامل الارتباط (ρ).

مثال (12.8):

لدراسة العلاقة بين إنتاجية العامل وعدد الدورات التدريبية التي اجتازها تم سحب عينة من ثلاث معامل لإحدى الشركات وحسب معامل الارتباط بين الإنتاجية وعدد الدورات المجتازة فكان كالآتي:

المعمل	حجم العينة	معامل الارتباط
الأول	50	0.8
الثاني	55	0.75
الثالث	65	0.7

هل يمكن القول أن معاملات الارتباط المحسوبة هي تقديرات متجانسة لمعامل ارتباط المجتمع لهذين المتغيرين؟ اختبر عند مستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات البحث:

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$

H_1 : على الأقل أحد معاملات الارتباط مختلف عن البقية

الكلية	n_i	r_i	n_i-3	γ_i	$(n_i-3)\,\gamma_i$	$(\gamma_i-\bar{Z})^2$	$(n_i-3)(\gamma_i-\bar{Z})^2$
الأول	50	0.8	47	1.0986	51.6342	0.016806	0.78988
الثاني	55	0.75	52	0.9730	50.596	0.0000163	0.00008476
الثالث	65	0.7	62	0.8673	53.7726	0.010335	0.640755
			161		156.0028		1.4314826

$$\bar{Z} = \frac{156.0028}{161} = 0.96896$$

$$\chi^2 = 1.4314826$$

❖ نجد قيمة مربع كاي الجدولية بمستوى معنوية (0.05) وبدرجة حرية (k-1) أي (3-1=2):

$$\chi^2_{0.05,2} = 5.991$$

❖ القرار: لما كانت قيمة مربع كاي المحسوبة أقل من قيمة مربع كاي الجدولية فإننا نقبل فرضية (H_0) أي أن العينات الثلاثة مسحوبة من مجتمعات ذات معامل ارتباط متساوي وتقديرات معاملات الارتباط هذه متجانسة عند مستوى معنوية 5٪.

مثال (13.8):

البيانات التالية تمثل عدد ساعات الاشتغال للماكنة (X) وعدد الوحدات الصالحة المنتجة (Y) المطلوب اختبار الفرضية هل يوجد أثر لعدد ساعات اشتغال الماكنة على عدد الوحدات الصالحة المنتجة؟

X	Y	XY	X^2	Y^2	$\hat{Y}$	$Y-\hat{Y}$	$(Y-\hat{Y})^2$	$(X_i-\bar{X})$	$(X_i-\bar{X})^2$
1	20	20	1	400	17	3	9	-3.5	12.25
2	20	40	4	400	15.667	4.333	18.775	-2.5	6.25
3	19	57	9	361	14.334	4.666	21.772	-1.5	2.25
4	19	76	16	361	13.001	5.999	35.988	-0.5	0.25
5	19	95	25	361	11.668	7.332	53.758	0.5	0.25
6	15	90	36	225	10.335	4.665	21.762	1.5	2.25
7	14	98	49	196	9.002	4.998	24.980	2.5	6.25
8	10	80	64	100	7.669	2.331	5.43356	3.5	12.25
36	136	556	204	2404			191.4666		42

الحل:

❖ فرضيات الاختبار في هذه الحالة:

$$H_0 = b = 0$$
$$H_1 = b \neq 0$$

$$\bar{X} = \frac{36}{8} = 4.5$$

$$\bar{Y} = 17$$

$$\hat{b} = \frac{556 - 8(4.5)(17)}{204 - 8(4.5)^2} = \frac{-56}{42} = -1.333$$

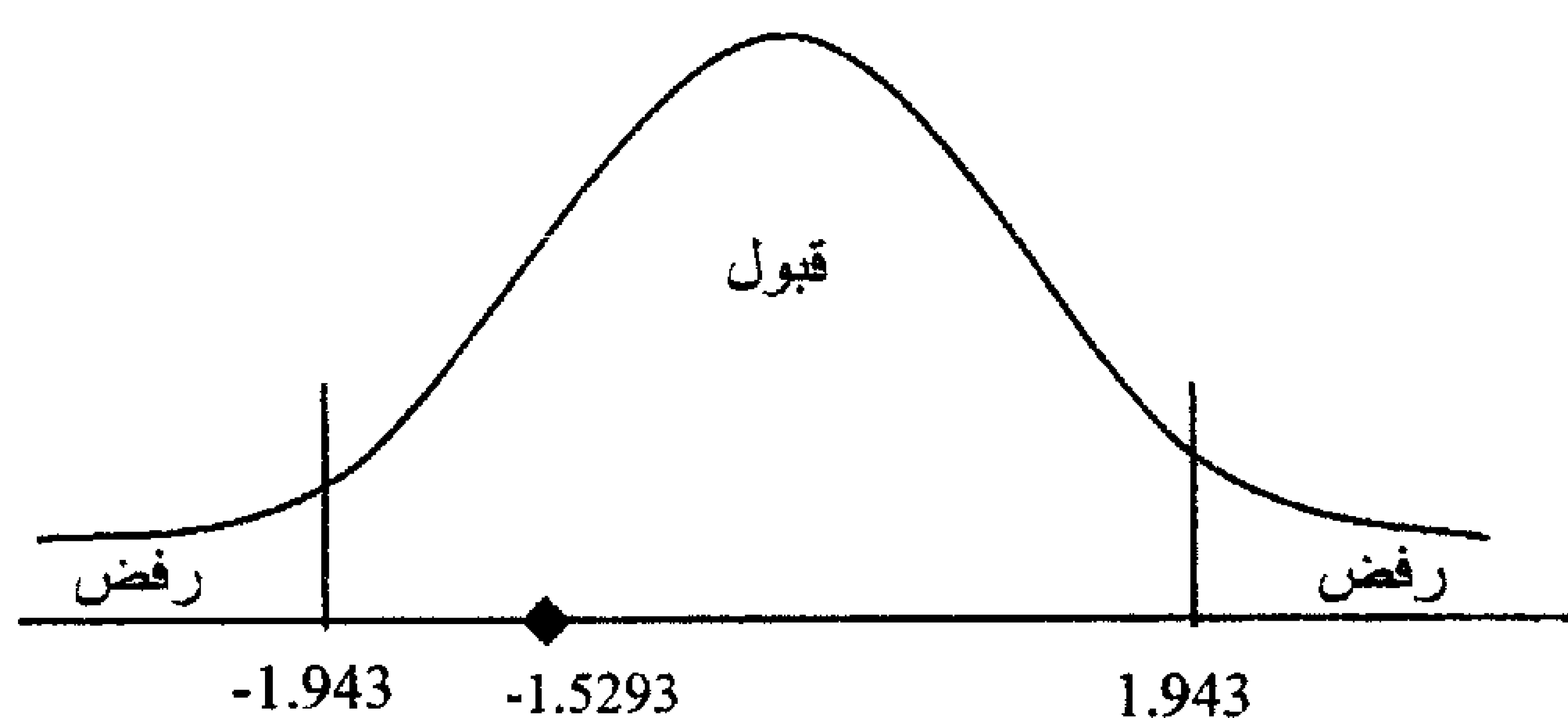
$$\hat{a} = 17 - (-1.333) = 17 + 1 = 18.333$$

$$\hat{Y}_i = 18.333 - 1.333 X_i$$

$$S_E\ \hat{b}\ = \sqrt{\frac{191.4666}{(8-2)(42)}} = 0.87166$$

$$t = \frac{-1.333}{0.87166} = -1.5293$$

ومن جداول (t) عند درجة حرية (6) ومستوى معنوية (0.05) تكون القيمة الجدولية مساوية إلى (1.943) وعليه فإن النقاط الحرجة والمساحة الحرجة هي:



❖ القرار: بما أن قيمة (t) المحسوبة وقعت في منطقة القبول نقبل (H_0) أي أن (b=0) ولا توجد علاقة بين ساعات الاشتغال وعدد الوحدات الصالحة لهذه البيانات.

أسئلة الفصل الثامن

1) كان الارتباط المحسوب من عينة حجمها (20) منتج بين ربح المنتج وتاريخ الإنتاج (-0.4) هل تعتقد أنه توجد علاقة عكسية قوية بين ربح المنتج وتاريخ الإنتاج. اختبر بمستوى معنوية 0.05.
2) إذا كان الارتباط بين سعر السلعة والكمية المطلوبة لـ(20) يوم من أيام تمت دراسة السوق فيها هو (-0.8) هل تعتقد أن معامل الارتباط بين الكمية المطلوبة وسعر السلعة ارتباط قوي عكسي؟ اختبر بمستوى معنوية 0.01.
3) كان الارتباط الخطي البسيط المحسوب لعينة بحجم (20) امرأة بين عدد سنوات العمل وحجم الاستثمار في الأسواق المالية (0.6) ولـ(25) رجل كان الارتباط هو (0.8) هل تعتقد أن هاتين العينتين قد تم اختيارهما من مجتمعين يمتلكان نفس الارتباط؟ اختبر بمستوى معنوية 1٪.
4) لدراسة أجريت في ثلاثة فروع من فروع البنك كان معامل الارتباط بين حجم السيولة ومستوى الاقتراض محسوبة لعدد من الأشهر في السنة موضحة بالجدول التالي:

الفرع	عدد الأشهر	معامل الارتباط
الأول	10	0.8
الثاني	11	0.85
الثالث	12	0.88

هل يمكن القول أن معاملات الارتباط هي تقديرات متجانسة لمعامل ارتباط المجتمع لهذين المتغيرين؟ اختبر عند مستوى معنوية 1٪.

5) البيانات التالية للمتغير (X) الذي يمثل معدل تخرج الطالب في الإعدادية و(Y) معدل تخرجه في الكلية، هل تعتقد أنه يوجد أثر لمعدل تخرج الطالب في الإعدادية على معدل تخرج الطالب في الكلية؟ اختبر بمستوى معنوية 0.01.

X	Y
80	75
70	72
75	70
60	65
50	60
55	60
75	70
85	78
65	70
90	80

الفصل التاسع

اختبارات الاستقلالية وحسن المطابقة

الفصل التاسع

اختبارات الاستقلالية وحسن المطابقة

سنتناول في هذا الفصل اختبارات الاستقلالية واختبارات حسن المطابقة لظاهرتين موزعتين في جداول تسمى جداول التوافق، حيث تتوزع مستويات المتغير الأول أفقياً في هذا الجدول، بينما تتوزع مستويات المتغير الثاني عمودياً وذلك باستخدام اختبارات مربع كاي (χ^2).

9-1 اختبار الاستقلالية:

يهدف هذا الاختبار على وجود أو عدم وجود علاقة بين متغيرين (عاملين أو صفتين) لكل منهما عدة مستويات بحيث أن مستويات المتغير الأول موزعة بشكل أفقي ومستويات المتغير الثاني موزعة بشكل عمودي في جدول يسمى جدول تحليل التوافق. ولتوضيح هذا الجدول نفرض أن المتغير (A) له (m) من المستويات وأن المتغير (B) له (k) من المستويات وكالآتي:

جدول (1)

جدول التوافق بين مستويات المتغير (A) والمتغير (B)

المجموع	A_m	...	A_j	...	A_2	A_1	A / B
$O_{1.}$	O_m E_{1m}	...	O_{1j} E_{ij}	...	O_{12} E_{12}	O_{11} E_{11}	B_1
$O_{2.}$	O_{2m} E_{2m}	...	O_{2j} E_{ij}	...	O_{22} E_{22}	O_{21} E_{21}	B_2
	. .				. .	. .	. .
$O_{i.}$	. .	...	O_{ij} E_{ij}			O_{i1}	B_i
	. .				. ,	. .	. .
$O_{k.}$	O_{km} E_{km}	...	O_{kj} E_{kj}		O_{k2} E_{k2}	O_{k1} E_{k1}	B_k
$O_{..}$	$O_{.m}$		$O_{.j}$		$O_{.2}$	$O_{.1}$	المجموع

حيث أن:

O_{ij} = التكرار المشاهد المشترك بين المستوى (i) من المتغير الأول والمستوى (j) من المتغير الثاني

علماً أن $i = 1, 2, \ldots, k$ ، $j = 1, 2, \ldots, m$

$O_{i.}$ = مجموع تكرارات خلايا الصف (i)

$O_{.j}$ = مجموع تكرارات خلايا العمود (j)

$O_{..}$ = مجموع جميع تكرار الجدول (حجم العينة n)

E_{ij} = التكرار المتوقع للخلية ذات مستوى أفقي (i) ومستوى عمودي (j) وتحسب كالآتي:

$$E_{ij} = \frac{(O_{i.})(O_{.j})}{O_{..}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(9\text{-}1)$$

أما معيار الاختبار فيكون:

$$\chi^2 = \overset{k}{\underset{i=1}{}} \quad \overset{m}{\underset{j=1}{}} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \qquad ....(9-2)$$

والذي يتوزع توزيع مرب كاي (χ^2) بدرجة حرية مساوية إلى (k-1)(m-1) ويتم مقارنة قيمة مربع كاي المحسوبة مع القيمة الجدولية بمستوى معنوية معلوم ودرجة حرية (k-1)(m-1) وعندما تكون قيمة مربع كاي المحسوبة أكبر من الجدولية ترفض (H_0) القائلة بعدم وجود علاقة معنوية بين المتغيرين وقبول الفرضية البديلة (H_1) التي تؤكد وجود علاقة بين المتغيرين.

إن تطبيق هذا الاختبار مرهون بتوفر الشروط التالية:

1) أن كل مشاهدة من مشاهدات العينة تنتمي لمستوى واحد من مستويات المتغير (A) ومستوى واحد فقط من مستويات المتغير (B).

2) حجم العينة المختار كبير ولا يقل عن 50 مشاهدة.

3) لا تقل تكرار أي خلية من خلايا جدول التوافق عن (5) تكرارات وفي حالة عدم تحقق هذا الشرط فتدمج هذه الخلية مع الخلية التي فوقها أو التي تحتها (وهنا يجب دمج كل صف مع الصف الأعلى أو الصف الأدنى للخلية)، أو أن تدمج مع الخلية التي إلى يسارها أو التي على يمينها وفي هذه حالة يدمج العمود مع العمود إلى يسار أو إلى يمين الخلية.

4) يجب أن يكون مجموع التكرارات المشاهدة مساوية لمجموع التكرارات المتوقعة. أي أن:

$$\sum_{i-1}^{k}\sum_{j=1}^{m} O_{ij} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} E_{ij} \qquad ....(9-3)$$

مثال (1.9):

الجدول التالي يبين العلاقة بين نوع المخالفة المرورية وبين التحصيل الدراسي حيث سحبت عينها حجمها (100) مشاهدة وثبتت المعلومات عن هؤلاء الأشخاص وكانت كالآتي:

نوع المخالفة / تحصيل دراسي	الوقوف بمكان ممنوع	مخالفة إشارة ضوئية	مخالفة في سلامة المركبة	مخالفة تجاوز السرعة المحددة	مخالفات اخرى	المجموع
ابتدائي	20	18	20	10	22	90
إعدادي	15	22	17	16	10	80
ثانوي	18	10	10	14	18	70
جامعي	12	10	8	20	10	60
المجموع	65	60	55	60	60	300

اختبر هل أن التحصيل الدراسي مستقل عن نوع المخالفة المرورية؟

الحل:

❖ فرضية البحث:

H_0 : أن مستويات التحصيل الدراسي مستقلة عن نوع المخالفة

H_1 : أن مستويات التحصيل الدراسي ليست مستقلة عن نوع المخالفة

نجد القيمة المتوقعة لكل خلية من الخلايا:

$$E_{11} = \frac{65 \times 90}{300} = 19.5$$

$$E_{12} = \frac{60 \times 90}{300} = 18$$

$$E_{13} = \frac{55 \times 90}{300} = 16.5$$

.
.
.
.

$$E_{45} = \frac{60 \times 60}{300} = 12$$

فيصبح جدول القيم المشاهدة والقيم المتوقعة والتي تكون بزوايا الخلايا وكالآتي:

نوع المخالفة / تحصيل دراسي	وقوف بمكان ممنوع	مخالفة إشارة ضوئية	مخالفة في سلامة المركبة	مخالفة تجاوز السرعة المحددة	مخالفات أخرى	المجموع
ابتدائي	20 (19.5)	18 (18)	20 (16.5)	10 (18)	22 (18)	90
إعدادي	15 (17.333)	22 (16)	17 (14.667)	16 (16)	10 (16)	80
ثانوي	18 (15.1666)	10 (14)	10 (12.833)	14 (14)	18 (14)	70
جامعي	12 (13)	10 (12)	8 (11)	20 (12)	10 (12)	60
المجموع	65	60	55	60	60	300

$$\chi^2 = \frac{(20-19.5)^2}{19.5} + \frac{(18-18)^2}{18} + ... + \frac{(10-12)^2}{12}$$

$$\chi^2 = 17.7203612$$

أما قيمة (χ^2) الجدولية بمستوى معنوية (0.05) ودرجات حرية (12) فتساوي:

$$\chi^2_{(0.05/12)} = 28.299$$

❖ القرار: بما أن مربع كاي المحسوبة أقل من مربع كاي الجدولية لذا تقبل (H_0) أي أن مستويات نوع المخالفة مستقلة عن التحصيل العلمي للفرد في هذه العينة.

مثال (2.9):

البيانات التالية سحبت من المرضى الذين تم فحصهم في أحد مستشفيات معالجة مرضى السكر:

الجنس / شدة الإصابة	مرض السكر			المجموع
	معرض للإصابة	إصابة من النوع الأول	إصابة من النوع الثاني	
ذكر	50 (55)	40 (45)	110 (100)	200
أنثى	60 (55)	50 (45)	90 (100)	200
المجموع	110	90	200	400

اختبر استقلالية التعرض لمرض السكر عن الجنس.

الحل:

❖ فرضيات البحث هي:

H_0 : الإصابة بالمرض مستقلة عن نوع الجنس

H_1 : الإصابة بالمرض غير مستقلة عن نوع الجنس

❖ نجد القيمة المتوقعة المقابلة لكل قيمة مشاهدة:

$$E_{11} = \frac{110\times200}{400} = 55$$

$$E_{12} = \frac{90\times200}{400} = 45$$

$$E_{13} = \frac{200\times200}{400} = 100$$

$E_{21} = 55$
$E_{22} = 45$
$E_{23} = 100$

$$\chi^2 = \frac{(50-55)^2}{55} + \frac{(40-45)^2}{45} + \ldots\ldots + \frac{(90-100)^2}{100}$$

$\chi^2 = 4.0202$

❖ نجد قيمة مربع كاي الجدولية بمستوى معنوية (0.01) ودرجة حرية (2):

$$\chi^2_{0.01,2} = 10.828$$

بما أن قيمة (χ^2) المحسوبة أقل من قيمة (χ^2) الجدولية تقبل (H_0) أي أن الجنس مستقل عن شدة الإصابة بمرض السكر.

2-9 اختبار حسن المطابقة Goodness of fit:

تعتمد فكرة هذا الاختبار على مدى مطابقة التكرار المشاهد (O_i) مع التكرار النظري أو المتوقع (E_i) فإذا كانت الفروقات أو الانحرافات بين هذين التكرارين قليلة واقتربت إلى الصفر كان ذلك دليلاً على أن العينة المسحوبة تمثل المجتمع المسحوبة منه أو أن توزيع هذه العينة هو نفس توزيع المجتمع، أي أننا سنختبر هل أن المجتمع يتوزع توزيعاً معيناً (محدد مسبقاً).

لذا فإن فرضيات البحث ستكون:

H_0 : أن بيانات العينة تتوزع توزيعاً معيناً

H_1 : بيانات العينة لا تتوزع وفق هذا التوزيع

إن معيار الاختبار الملائم هو:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad \text{..........(9-4)}$$

والذي يتوزع توزيع مربع كاي بمستوى معنوية محدد ودرجة حرية مساوي إلى (k) مطروحاً منه عدد القيود.

وأن:

K : يمثل عدد مستويات المتغير أو العامل

O_i : التكرار المشاهد للمستوى (i)

E_i : التكرار المتوقع للمستوى (i)

ويمكن حساب التكرار المتوقع وفق العلاقة التالية:

$$E_i = P_i \sum_{i=1}^{k} O_i \qquad \text{.........(9-5)}$$

وأن (P_i) يمثل احتمال تحقق التكرار في الخلية (i) وأن:

$$\sum_{i=1}^{k} E_i = \sum_{i=1}^{k} O_i \qquad \text{.........(9-6)}$$

ويمكن تطبيق هذا الاختبار بعد تحقق الشروط التالية:

1) مستويات المتغير (X) يجب أن تكون مستقلة فيما بينها، أي لا يجوز أن تكون هناك مشاهدة أو مفردة تنتمي لأكثر من مستوى واحد.

2) يجب أن يكون حجم العينة (عدد المشاهدات) كبير وأكبر من (50) مفردة.

3) أن درجة الحرية استناداً لوجود القيد $\left[\sum E_i = \sum O_i\right]$ هو (k-1). ولكن في حالة استخدام تقديرات لمعلمات في توزيع تحت الاختبار فيتم طرح عدد المعلمات المقدرة من (k-1) فإذا كان الاختبار للتوزيع الطبيعي، فالمعروف أنه لهذا التوزيع معلمتين هما (σ^2 , M) لذا تصبح درجة الحرية

$$k - 1 - 2 = k - 3$$

مثال (3.9):

البيانات التالية تمثل إنفاق أسرة خلال أيام الأسبوع السبعة، هل تعتقد أن الإنفاق الأسري هذا يتوزع توزيعاً منتظماً (Uniform distribution) اختبر بمستوى معنوية (0.05)؟

اليوم	الإنفاق الأسري (بالدينار)
السبت	30
الأحد	20
الاثنين	50
الثلاثاء	10
الأربعاء	40
الخميس	30
الجمعة	20
	200

الحل:

❖ فرضيات الدراسة:

H_0 : الإنفاق الأسري يتبع التوزيع المنتظم

H_1 : الإنفاق الأسري لا يتبع التوزيع المنتظم

اليوم	O_i	P_i	$E_i = P_i \sum O_i$	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
السبت	30	$\frac{1}{7}$	30	0	0	0
الأحد	20	$\frac{1}{7}$	30	-10	100	3.333
الاثنين	50	$\frac{1}{7}$	30	20	400	13.333
الثلاثاء	10	$\frac{1}{7}$	30	-20	400	13.333
الأربعاء	40	$\frac{1}{7}$	30	10	100	3.333
الخميس	30	$\frac{1}{7}$	30	0	0	0
الجمعة	30	$\frac{1}{7}$	30	0	0	0
	210	1				33.3326

$\chi^2 = 33.3326$

قيمة مربع كاي الجدولية لمستوى معنوية (0.05) ودرجات حرية (7-1=6) هي:

$$X^2_{0.05,6} = 12.59$$

وبما أن قيمة (X^2) المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية نرفض (H_0) أي الإنفاق الأسري خلال أيام الأسبوع السابقة لا يتبع التوزيع المنتظم.

مثال (4.9):

ماكنة لإنتاج أقداح بلاستيكية تم متابعتها لمدة شهر واحد فوجد أن عدد الأقداح المعيبة بالإنتاج كالآتي:

عدد الأقداح المعيبة	0	1	2	3	4	5
عدد الأيام	15	5	4	3	2	1

اختبر هل أن عدد الأقداح المعيبة يتوزع توزيع بواسون.

الحل:

❖ فرضيات البحث أن:

H_0 : العدد المعيب بالإنتاج يتوزع توزيع بواسون

H_1 : العدد المعيب بالإنتاج لا يتوزع توزيع بواسون

X_i	O_i	X_iO_i	$P(X)=\frac{e^{-1.167}(1.167)^X}{X!}$	$E_i=P_i\ O_i$	O_i-E_i	$(O_i-E_i)^2$	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
0	15	0	0.31129944	9.33898	5.66102	32.04715	3.431546854
1	5	5	0.363286	10.89858	-5.89858	34.79325	3.1924568
2	4	8	0.2119776	6.359328	-2.359328	5.5664286	2.25018034
3	3	9	0.082459	2.47377	0.52623	0.2769180	0.38368112
4	2	8	0.024058	0.72174	1.27826	1.6339486	2.26390196
5	1	5	0.005615	0.16845	0.83155	0.691475	4.10492967
	30	35					15.62669672

$$\bar{X} = \lambda = \frac{35}{30} = 1.167$$

$$P(X) = \frac{e^{-1.167} (1.167)^x}{X!}$$

$\chi^2 = 15.62669672$ المحسوبة

أما قيمة مربع كاي الجدولية لمستوى معنوية (0.05) ودرجة حرية (6-1-1=4) (حيث أن توزيع بواسون له معلمة واحدة وهي λ) فهي:

$$X^2_{0.05,4} = 13.2767$$

وبما أن قيمة (χ^2) المحسوبة أكبر من الجدولية ترفض (H_0) وعدد الأقداح المعيبة لا تتوزع توزيع بواسون.

مثال (5.9):

أجري امتحان لـ(80) طالب وزعت عليهم استمارة تحتوي على (5) أسئلة وكانت الإجابة بنعم أو كلا وبعد تصحيح الامتحان تم التوصل للمعلومات التالية:

عدد الإجابات الخاطئة في الاستمارة	(X_i)	0	1	2	3	4	5
عدد الطلبة	(O_i)	10	15	18	20	10	7

اختبر أن عدد الإجابات الخاطئة (X) يتوزع توزيعاً ثنائي الحدين، استخدم مستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات البحث أن:

H_0 : X الذي يمثل عدد الإجابات الخاطئة في الاستمارة يتوزع توزيع ثنائي الحدين

H_1 : X لا يتوزع توزيع ثنائي الحدين

X_i	O_i	$P(X)=C_X^5\left(\frac{1}{2}\right)^X\left(\frac{1}{2}\right)^{5-X}$	E_i	(O_i-E_i)	$(O_i-E_i)^2$	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
0	10	0.03125	2.5	-7.5	56.25	22.5
1	15	0.15625	12.5	2.5	6.25	0.5
2	18	0.3125	25	-7	49	1.96
3	20	0.3125	25	-5	25	1
4	10	0.15625	12.5	-2.5	6.25	0.5
5	7	0.03125	2.5	4.5	20.25	8.1
	80					34.56

χ^2 المحسوبة $= 34.56$

أما قيمة مربع كاي الجدولية بمستوى معنوية (0.05) ودرجة حرية (5-1-2=2) (وذلك لتوزيع ثنائي الحدين معلمتين هما P , n):

$$\chi^2_{0.05/2} = 5.991$$

وبما أن قيمة (χ^2) المحسوبة أكبر من الجدولية نرفض (H_0) أي أن عدد الإجابات الخاطئة لا تتوزع توزيعاً ثنائي الحدين.

مثال (6.9):

خلال دراسة أجريت في أحد المعامل كانت الأجور موزعة حسب الفئات التالية:

فئات الأجور	f_i
110-140	10
141-171	20
172-202	40
203-233	18
234-264	8

اختبر هل أن الأجور تتوزع توزيعاً طبيعياً؟

الحل:

Classes	f_i	X_i	f_iX_i	X_i^2	$f_iX_i^2$
110-140	10	125	1250	15625	156250
141-171	20	156	3120	24336	486720
172-202	40	187	7480	34969	1398760
203-233	18	218	3924	47524	855432
234-264	8	249	1992	62001	496008
	96		17766		3393170

$$\bar{X} = \frac{17766}{96} = 185.0625$$

$$S^2 = \frac{3393170 - 96(185.0625)^2}{96 - 1} = 1108.943421$$

S= 33.3

لإيجاد التكرار المتوقع للفئة الأولى:

$$P(109.5 < X < 140.5) = P\left(\frac{109.5 - 185.0625}{33.3} < Z < \frac{140.5 - 185.0625}{33.3}\right)$$

$$= P(-2.26914 < Z < -1.338213213)$$
$$= 0.0885 - 0.0119$$
$$= 0.0766$$

وللفئة الثانية:

$$P(140.5 < X < 171.5) = P(-1.3382 < Z < -0.40728)$$
$$= 0.3409 - 0.0901$$
$$= 0.2471$$

أما الفئة الثالثة:

$$P(171.5 < X < 202.5) = P(-0.40728 < Z < 0.523648)$$
$$= 0.6985 - 0.3409$$
$$= 0.3576$$

للفئة الرابعة:

$$P(202.5 < Z < 233.5) = P(0.523648 < Z < 1.4545)$$
$$= 0.9265 - 0.6985$$
$$= 0.228$$

للفئة الخامسة:

$$P(233.5 < X < 264.5) = P(1.4545 < Z < 2.3855)$$
$$= 0.9913 - 0.9265$$
$$= 0.0648$$

وبذلك يمكن حساب قيمة مربع كاي المحسوبة من الجدول التالي:

فئات الأجور	O_i	P_i	$E_i = P_i \; O_i$	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
110-140	10	0.0766	7.3536	2.6464	7.003432	0.9523
141-171	20	0.2471	23.7216	-3.7216	13.85031	0.5838
172-202	40	0.3576	34.3296	5.6704	32.153436	0.936609
203-233	18	0.228	21.888	-3.888	15.116544	0.6906315
234-264	8	0.0648	6.2208	1.7792	3.16555	0.508865
	96					3.672206

إذاً قيمة مربع كاي المحسوبة:

$$\chi^2_{\text{محسوبة}} = 3.672206$$

أما قيمة مربع كاي الجدولية لمستوى معنوية (0.05) ودرجة حرية (k-1-2) حيث أن معالم التوزيع الطبيعي هي معلمتين (σ^2 , M) لذا درجة الحرية تصبح:

$$5 - 1 - 2 = 2$$

$$X^2_{0.05,2} = 5.991$$

ولأن قيمة مربع كاي المحسوبة أقل من الجدولية تقبل (H_0) أي أن فئات الأجور تتوزيع توزيعاً طبيعياً.

أمثلة محلولة

مثال (7.9):

الجدول التالي لـ(   ) موظف دونت عنهم معلومات عن عدد الدورات التدريبية ودرجة تقييمهم السنوي، هل تعتقد أن هناك علاقة بين عدد الدورات التدريبية ودرجة تقييمهم؟ اختبر بمستوى معنوية

التقييم / عدد الدورات	ضعيف	مقبول	جيد	جيد جداً	امتياز	المجموع
دورة واحدة	10	20	40	5	0	85
دورتين	15	30	50	10	0	105
ثلاث دورات	10	15	60	20	1	106
أكثر من ثلاثة	5	10	70	30	1	116
المجموع	50	75	220	65	2	412

الحل:

❖ فرضية الاختبار:

H_0 : إن درجة تقييم الموظف مستقلة عن عدد الدورات التدريبية له

H_1 : إن درجة تقييم الموظف ليست مستقلة عن عدد الدورات التدريبية له

❖ نجد القيم المتوقعة لكل خلية من الخلايا:

$$E_{11} = \frac{(85)(50)}{412} = 10.316$$

$$E_{12} = \frac{(85)(75)}{412} = 15.473$$

$$\vdots$$

$$E_{44} = \frac{(116)(65)}{412} = 18.301$$

$$E_{45}=\frac{(116)(2)}{412}=0.563$$

ويصبح جدول القيم المشاهدة والقيم المتوقعة كالآتي:

التقييم / عدد الدورات	ضعيف	مقبول	جيد	جيد جداً	امتياز	المجموع
دورة واحدة	20 10.316	20 15.473	40 45388	5 13.410	0 0.413	85
دورتين	15 12.743	30 19.114	50 56.068	10 16.566	0 0.510	105
ثلاث دورات	10 12.864	15 19.300	60 56.601	20 16.723	1 0.515	106
أكثر من ثلاثة دورات	5 14.078	10 21.117	70 61.942	30 18.301	1 0.563	116

❖ نجد القيمة المحسوبة لمربع كاي:

$$\chi^2=\frac{(20-10.316)^2}{10.316}+\frac{(20-15.473)^2}{15.473}+\dots\dots+\frac{(1-0.563)^2}{0.563}$$
$$=50.5811$$

❖ قيمة مربع كاي الجدولية بمستوى معنوية (0.05) ودرجات حرية (12):

$$\chi^2_{(0.05,12)}=28.299$$

❖ **القرار:** بما أن مربع كاي المحسوبة أكبر من الجدولية نرفض (H_0) وهذا يعني أن تقييم الموظف ليس مستقلاً عن عدد الدورات التي شارك بها.

مثال (8.9):

البيانات التالية تمثل تكاليف أحد المعامل على الإنتاج خلال ستة أشهر من السنة هل تعتقد أن تكاليف الإنتاج تتوزع توزيعاً منتظماً؟ اختبر بمستوى معنوية (0.05).

الشهر	حجم التكاليف (بألف دينار)
1	20
2	22
3	24
4	23
5	24
6	25
	138

الحل:

❖ فرضيات الدراسة:

H_0 : تكاليف الإنتاج تتوزع توزيع منتظم

H_1 : تكاليف الإنتاج لا تتوزع توزيع منتظم

الشهر	O_i	P_i	$E_i = P_i \sum O_i$	O_i-E_i	$(O_i-E_i)^2$	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
1	20	$\frac{1}{6}$	23	-3	9	0.3913
2	22	$\frac{1}{6}$	23	-1	1	0.04348
3	24	$\frac{1}{6}$	23	1	1	0.04348
4	23	$\frac{1}{6}$	23	0	0	0
5	24	$\frac{1}{6}$	23	1	1	0.04348
6	25	$\frac{1}{6}$	23	2	4	0.173913
	138					0.695653

وبذلك فإن قيمة مربع كاي المحسوبة هي:

$$\chi^2 = 0.695653$$

أما قيمة مربع كاي الجدولية بمستوى معنوية (0.05) ودرجات حرية (6-1=5) هي:

$$\chi^2_{0.05,5} = 11.0705$$

❖ **القرار:** بما أن قيمة مربع كاي المحسوبة أصغر من القيمة الجدولية نقبل (H_0) وهذا يعني أن تكاليف الإنتاج للأشهر الستة تتوزع توزيعاً منتظماً.

مثال (9.9):

البيانات التالية تمثل عدد الوحدات المعيبة خلال أسبوع لأحد مكائن الإنتاج في أحد المصانع، هل تعتقد أن عدد الوحدات المعيبة يتوزع توزيع ثنائي الحدين؟ اختبر بمستوى معنوية 0.05.

اليوم	1	2	3	4	5	6	7
عدد الوحدات المعيبة	3	5	4	8	2	1	3

الحل:

❖ فرضيات البحث:

H_0 : عدد الوحدات المعيبة في الإنتاج للماكنة تتوزع توزيع ثنائي الحدين

H_1 : عدد الوحدات المعيبة في الإنتاج للماكنة لا تتوزع توزيع ثنائي الحدين

X_i	O_i	X_iO_i	$P(X)= C^7_X \left(\frac{1}{2}\right)^X \left(\frac{1}{2}\right)^{7-X}$	$E_i=P_i\ O_i$	O_i-E_i	$(O_i-E_i)^2$	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
1	3	3	0.0546875	1.421875	1.578125	2.4904785	1.75154533
2	5	6	0.1640625	4.265625	0.734375	0.53930664	0.12643086
3	4	12	0.2734375	7.109375	-3.109375	9.668212891	1.359924451
4	8	32	0.273475	7.109375	0.890625	0.79321289	0.890625
5	2	10	0.164062	4.26562	-2.26562	5.133033984	1.203350037
6	1	6	0.0546875	1.421875	-0.421875	0.177978515	0.125171703
7	3	21	0.0546875	1.421875	1.578125	2.4904785	1.75154533
	26	117					7.208592711

$$\chi^2 = 7.208592711$$

❖ نجد قيمة مربع كاي الجدولية بمستوى معنوية (0.05) ودرجات حرية (7-1=6) هي:

$$\chi^2_{0.05,6} = 12.59$$

❖ القرار: بما أن قيمة مربع كاي المحسوبة أقل من مربع كاي الجدولية تقبل (H_0) أي أن عدد الوحدات المعيبة للماكنة تتوزع توزيع ثنائي الحدين.

أسئلة الفصل التاسع

1) الجدول التالي لمستوى تخرج الطالب في الكلية ومستوى تخرجه في الثانوية، اختبر هل أن مستوى تخرج الطالب في الكلية مستقل عن مستوى تخرجه في الثانوية؟ استخدم مستوى معنوية 0.05.

	مقبول	جيد	جيد جداً	امتياز	المجموع
مقبول	80	30	20	10	140
جيد	10	50	30	20	110
جيد جداً	15	25	80	60	180
امتياز	5	10	25	30	70
المجموع	110	115	155	120	500

2) الجدول التالي يبين تقدير تخرج مجموعة من الموظفين في دورة تعلم الحاسوب هل تعتقد أن تقدير التخرج مستقل عن تحصيله العلمي؟ اختبر بمستوى معنوية 0.01.

التقدير / التحصيل العلمي	مقبول	جيد	جيد جداً	امتياز	المجموع
ابتدائية	10	8	7	0	25
إعدادية	10	20	15	10	55
ثانوية	5	10	20	5	40
جامعية	10	10	20	20	60
المجموع	35	48	62	35	180

3) الجدول التالي يبين حجم المبيعات لإحدى المعامل خلال أشهر السنة، هل تعتقد أن مبيعات المعمل يخضع للتوزيع المنتظم؟

الشهر	المبيعات
1	2000
2	4000
3	3000
4	2500
5	3000
6	4500
7	3700
8	2000
9	4000
10	4500
11	2500
12	1500

4) الجدول التالي يبين عدد العطلات اليومية في مكائن المصنع لأسبوع كامل، هل تعتقد أن عدد العطلات يخضع لتوزيع بواسون؟ اختبر بمستوى معنوية 0.05.

اليوم	عدد العطلات
1	5
2	2
3	0
4	3
5	4
6	7
7	2

5) تنقل شركة بضاعة من ميناء العقبة إلى والجدول التالي يبين عدد الوحدات التي تصل معيبة في الحمولة المنقولة خلال ستة رحلات، هل تعتقد أن عدد الرحلات التي تصل معيبة تخضع لتوزيع ثنائي الحدين؟ اختبر بمستوى معنوية 0.01.

الرحلة	عدد الوحدات المعيبة
1	100
2	50
3	150
4	100
5	50
6	100

6) الجدول التالي بين فئات الأعمار التي أصيبت بأمراض من المشتغلين في أحد المعامل الكيماوية ، هل تعتقد أن توزيع المصابين بالمرض حسب العمر يخضع للتوزيع الطبيعي؟ اختبر بمستوى معنوية 0.05.

عددهم f_i	عمر العامل المصاب
2	20-24
8	25-29
9	30-34
10	35-39
6	40-44
4	45-49

الفصل العاشر

الاختبارات اللامعلمية

الفصل العاشر

الاختبارات اللامعلمية

10-1 مقدمة:

في كل الاختبارات التي تناولناها في الفصول السابقة كانت تعتمد هذه الاختبارات على أن المجتمع تحت الدراسة ومن خلال العينة كان له توزيع معروف وغالباً ما كان هذا التوزيع هو التوزيع الطبيعي ولاسيما عندما يكون حجم العينة كبيراً.

في هذا الفصل سوف نتطرق إلى طرق وأساليب إحصائية لاختبار الفرضيات لا تعتمد على معرفة التوزيع الإحصائي لمجتمع الدراسة، وتسمى هذه الطرق بالاختبار بالطرق اللامعلمية Non-Parametric Methods. وتسمى الطرق السابقة في الاختبار والتي تتطلب معرفة التوزيع وتخضع لشروط وقيود لتطبيقها بالطرق المعلمية Parametric Methods، وتعتمد الطرق المعلمية على معالم ومؤشرات التوزيع المستخدم. ومن أبرز الاختبارات اللامعلمية:

10-2 اختبار الإشارة لعينة واحدة:

تعتمد فكرة هذا البحث على اعتماد قيمة الوسيط (بدلاً من الوسط الحسابي) للبيانات التي تتصف بأنها عبارة عن رتب أو يمكن تحويلها إلى رتب. ويشترط بهذا الاختبار أن يكون المتغير تحت الدراسة متغيراً مستمراً ويعتمد هذا الاختبار على مجموعة من الإشارات الموجبة والسالبة، فإذا كانت القيمة أكبر من الوسيط كانت الإشارة موجبة، وإذا كانت أقل من الوسيط كانت الإشارة سالبة وتهمل القيمة إذا كانت مساوية إلى قيمة الوسيط. لذا يكون توزيع المتغير توزيع ثنائي الحدين بمعلمة مساوية (P) و(K) تمثل عدد الإشارات الأقل في عينة

الدراسة. ونجد احتمال ظهور المتغير (X) (الذي يمثل عدد الإشارات السالبة) بتطبيق الصيغة:

$$P(K \leq X / n, P) = \sum_{k=0}^{x} C_x^n P^x q^{n-x} \qquad ....(10\text{-}1)$$

وتقارن القيمة المحسوبة للاحتمال مع قيمة (α) (التي تمثل مستوى المعنوية) فإذا كانت قيمة الاحتمال المحسوب أقل من قيمة (α) نرفض فرضية العدم (H_0) (والتي تحدد بأن قيمة الوسيط تساوي قيمة معينة).

مع ملاحظة أنه إذا كان حجم العينة كبيراً فيمكن الاعتماد على اقتراب التوزيع ثنائي الحدين من التوزيع الطبيعي وتطبق العلاقة:

$$Z = \frac{K - np}{\sqrt{npq}} \qquad ....(10\text{-}2)$$

مثال (1.10):

تم إجراء اختبار على عشرة من المتقدمين لإشغال وظيفة في شركة تأمين وبعد تصحيح الاختبار كانت علاماتهم كالآتي:

تسلسل المتقدم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
العلامة	8	7	6	3	2	5	4	6	8	1

اختبر أن الوسيط للعلامات مساوي إلى (5).

الحل:

فرضيات البحث في هذه الحالة:

$H_0 : Me = 5$ or $H_0 : P(+) = P(-) = \frac{1}{2}$

$H_1 : Me \neq 5$ or $H_1 : P(+) \neq P(-)$

تسلسل المتقدم	العلامة	إشارة
1	8	+
2	7	+
3	6	+
4	3	-
5	2	-
6	5	0
7	4	-
8	6	+
9	8	+
10	7	+

لاحظ إن إحدى الإشارات أعطيت قيمة صفر لأنها تساوي قيمة الوسط والإشارة الموجبة أعطيت للعلامة التي هي أكبر من قيمة الوسيط (Me=5) والإشارة السالبة أعطيت للعلامة التي هي أقل من قيمة الوسيط، وبذلك فإن عدد الإشارات السالبة (k=3).

نجد قيمة الاحتمال وكالآتي:

$$P(K \leq 3/9/0.5) = \sum_{k=0}^{3} C_k^9 (0.5)^k (0.5)^{9-k}$$

$$= C_0^9 (0.5)^0 (0.5)^9 + C_1^9 (0.5)^1 (0.5)^8 + C_2^9 (0.5)^2 (0.5)^7 + C_3^9 (0.5)^3 (0.5)^6$$

$$= 0.001953125 + 0.017578125 + 0.0703125 + 0.1640625$$
$$= 0.25390625$$

وهنا الاختبار من جانبين لذا تقارن قيمة الاحتمال المستخرج مع قيمة $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ أي $\left(0.025 = \frac{0.05}{2}\right)$ ويمكن ملاحظة أن قيمة الاحتمال المستخرج أكبر من (0.025) لذا تقبل فرضية العدم (H_0) أي أن الوسيط لعلامات الاختبار هو (5).

10-3 اختبار الإشارة لعينتين:

في هذا الاختبار والذي يدرس حالة اختبار الفرق بين وسطين حسابيين ولا يشترط أن يكون توزيع مجتمعيها معروف. حيث يتم مقارنة كل زوج من أزواج القيم تحت الدراسة وتعطي القيمة الموجبة عندما يكون الفرق موجباً وسالبة عندما يكون الفرق في الزوج سالباً. ونستمر بنفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في اختبار الإشارة لعينة واحدة.

مثال (2.10):

البيانات التالية تمثل علامات الطلبة في مادة الرياضيات لعينتين سحبتا من كليتين مختلفتين في الجامعة. هل تعتقد أن هناك فروقاً معنوية في معدل العلامات ما بين الطلبة في كلا الكليتين:

الكلية (2)	الكلية (1)
68	70
80	75
66	80
60	65
50	55
60	66
61	68
67	67
80	85
85	90

الحل:

❖ فرضية البحث:

$$H_0 : P = \frac{1}{2}$$

$$H_1 : P \neq \frac{1}{2}$$

الإشارة	الكلية (2)	الكلية (1)
+	68	70
-	80	75
+	66	80
+	60	65
+	50	55
+	60	66
-	61	68
0	67	67
+	80	85
+	85	90

وبذلك تكون (n=9) (لأنه تم إهمال إحدى الإشارات عندما كان القيمة 0) أما عدد الإشارات السالبة فهي (k=2).

ولإيجاد الاحتمال تطبق دالة التوزيع ثنائي الحدين:

$$P(K \leq 2/9, \frac{1}{2}) = C_0^9 (0.5)^0 (0.5)^9 + C_1^9 (0.5)^1 (0.5)^8 + C_2^9 (0.5)^2 (0.5)^7$$

$$= 0.001953 + 0.017578123 + 0.0703125$$

$$= 0.08984325$$

ولأن الاختبار من جانبين فإن مستوى المعنوية المناسب للمقارنة ($\frac{a}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$) ويلاحظ أن قيمة الاحتمال (0.089843625) أكبر من قيمة (0.025) وعليه تقبل (H_0) ولا توجد فروق معنوية في علامات الطلبة لكلا الكليتين.

4-10 اختبار الوسيط:

ويستخدم هذا الاختبار لمعرفة فيما إذا كانت العينتين المسحوبتين من مجتمعين لهما نفس الوسيط.

ويجرى هذا الاختبار على المتغيرات المستمرة والتي يمكن ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً لغرض حساب الوسيط، ولعينتين تتبعان نفس الصفة المدروسة. ويمكن إجراء الاختبار عندما يكون مجموع حجم العينتين يتراوح من (20) إلى (40). ولغرض الاختبار يعد جدولاً للتوافق وكالآتي:

	تكرارات العينة (1)	تكرارات العينة (2)	المجموع
عدد المشاهدات التي قيمتها أكبر من قيمة الوسيط	A	B	A + B
عدد المشاهدات التي قيمتها أصغر من قيمة الوسيط	C	D	C + D
المجموع	A + C	B + D	N

ومعيار الاختبار في هذه الحالة:

$$\chi^2 = \frac{\left(|A\times D - B\times C| \div \frac{N}{2}\right)^2 \times N}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} \qquad ....(10\text{-}3)$$

وتقارن قيمة مربع كاي المحسوبة مع قيمة مربع كاي الجدولية بدرجة حرية (1) ومستوى معنوية محدد.

مثال (3.10):

تم سحب عينة عشوائية من كليتين من كليات الجامعة وسجلت علاماتهم في مادة مهارات الحاسوب فكانت كالآتي:

الكلية (B)	الكلية (A)
70	80
90	70
85	65
77	75
68	85
55	90
57	88
68	87
89	80
90	68
93	
92	

هل تعتقد أن هناك فروقاً بين الوسيط لكلا الكليتين في مستوى العلامات؟

الحل:

❖ فرضيات البحث:

H_0 : الوسيط لعلامات كلا الكليتين متساوي

H_1 : الوسيط لعلامات كلا الكليتين غير متساوي

❖ ندمج العينتين معاً ونرتب القيم تصاعدياً ونستخرج الوسيط:

55 57 65 68 68 68 70 70 77 79 80 80 85 85
87 88 89 90 90 90 92 93

ترتيب الوسيط $\frac{n+1}{2} = \frac{22+1}{2} = 11.5$

الوسيط = $\frac{80+79}{2} = 79.5$

	كلية (1)	كلية (2)	مجموع
أكبر من الوسيط	6	5	11
أصغر من الوسيط	4	7	11
المجموع	10	12	22

$$\chi^2 = \frac{|6\times7-5\times4|\div\frac{22}{2}^{\;2}\times 22}{11\times11\times12\times10}$$

$$=\frac{88}{14520}=0.00606$$

إن قيمة مربع كاي لمستوى معنوية (0.05) ودرجة حرية (1) هو (3.841) وبما أن القيمة المحسوبة لمربع كاي أصغر من القيمة الجدولية تقبل (H_0) أي أن العينتين مسحوبتين من مجتمعين لهما نفس الوسيط.

5-10 اختبار ولكوكسن The Wilcoxon Singned - Rank test:

ويستخدم هذا الاختبار للتوزيعات المتماثلة بحيث يمكن قسمتها إلى نصفين يكون الوسط أو الوسيط أو المنوال في الوسط دون الاعتماد على أن يكون التوزيع توزيعاً طبيعياً، ولذا ستكون فرضية العدم هي أن قيمة الوسيط أو المنوال أو الوسط مساوي إلى قيمة معينة ضد فرضية بديلة مناسبة. بعدها يتم حساب معيار أو إحصاء الاختبار بإعطاء رتب للفرق المطلق بين قيم العينة وقيمة الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال ثم تعاد الإشارة الأصلية لقيمة الفرق وتحسب قيمة $(w+)$ تمثل مجموع القيم الموجبة للفرق، بعد ذلك نحسب متوسط وتباين لهذه القيمة وكالآتي:

$$Mw^{+}=\frac{n(n+1)}{4} \qquad \text{..........(10-4)}$$

$$\sigma^2 w^+ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \qquad \text{..........(10-5)}$$

بعد ذلك نجد قيمة (Z) المحسوبة وكالآتي:

$$Z_{w+} = \frac{w^+ - Mw}{cw} \qquad \text{..........(10-6)}$$

وتقارن مع قيمة (Z) الجدولية من جداول (Z) القياسية، فإذا وقعت (Z_{w+}) المحسوبة في منطقة الرفض ترفض (H_0).

مثال (4.10):

سجلت الأجور اليومية لعشرة عمال يعملون في أحد المعامل الإنتاجية وكانت كالآتي:

الأجر (دينار)
20
15
30
40
50
18
30
35
40
45

هل تعتقد أن متوسط أجر العامل لا يقل عن (20) دينار، اختبر بمستوى معنوية (0.05).

الحل:

❖ فرضيات الاختبار:

$H_0 : M \geq 20$

$H_1 : M < 20$

❖ نجد المتوسط والتباين:

$$Mw = \frac{10(11)}{4} = 27.5$$

$$\sigma^2 w^+ = \frac{10(11)(21)}{24} = 96.25$$

❖ نجد (w^+) حسب الجدول التالي:

قيم X	X_i-M_0	D_i	رتب D_i	R_i
25	5	5	1.5	1.5
15	-5	5	1.5	-1.5
30	10	10	4.5	4.5
40	20	20	7.5	7.5
50	30	30	10	10
18	-2	2	3	-3
30	10	10	4.5	4.5
35	15	15	6	6
40	20	20	7.5	7.5
45	25	25	9	9

وبذلك فإن:

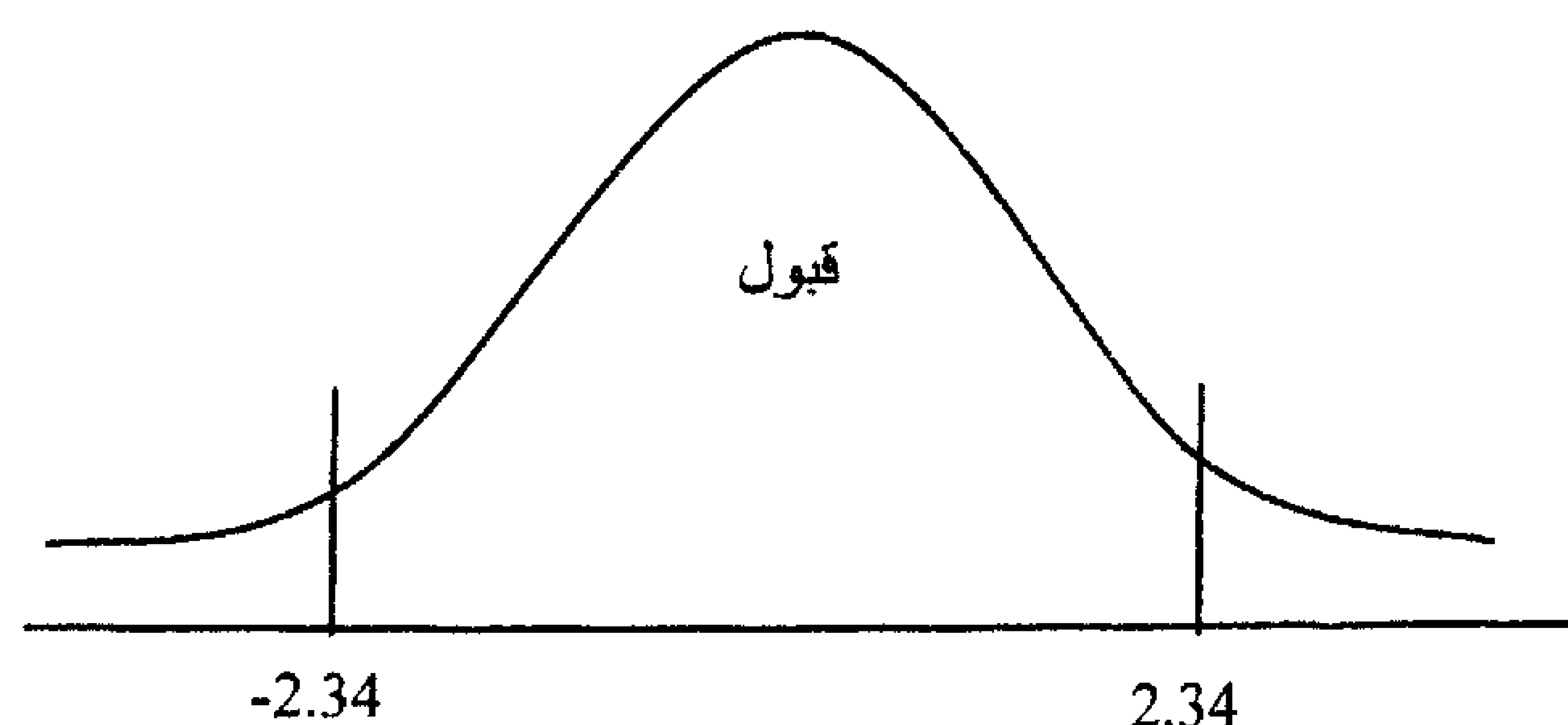
$$w^+ = 50.5$$

$$Z = \frac{50.5 - 27.5}{\sqrt{96.25}} = 2.34437$$

وباستخدام جداول التوزيع الطبيعي تكون قيمة (Z) الجدولية لمستوى معنوية (0.05) هي:

$$Z_{0.05} = 2.34$$

وبذلك تكون المساحة الحرجة والقيم الحرجة هي:



ومن ملاحظة الرسم نجد أن قيمة (Z) المحسوبة مساوية تقريباً إلى القيمة الحرجة وبذلك لا ترفض (H_0) أي أن متوسط الأجور لا يقل عن (20).

مثال (5.10):

كانت أرباح إحدى الشركات خلال (10) أشهر كالآتي:

(15، 12، 28، 6، 11.5، 19.7، 17.8، 10.5، 14.1، 8.2) اختبر أن متوسط الأرباح هو (14.5).

الحل:

❖ فرضيات الاختبار هي:

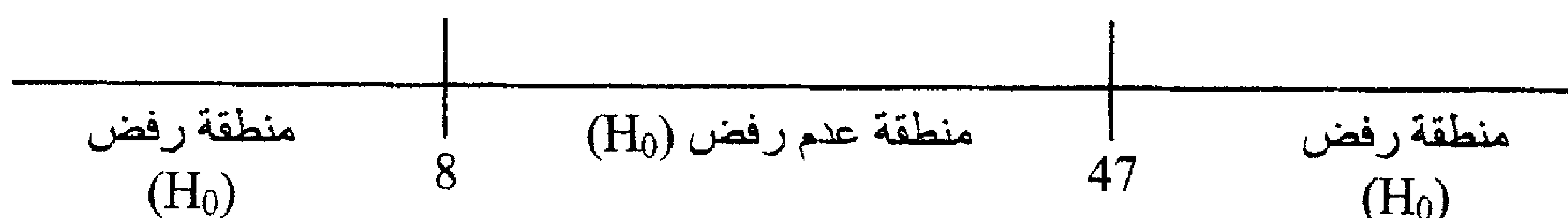
$$H_0 : M = 14.5$$
$$H_1 : M \neq 14.5$$

❖ نجد إحصاءة الاختبار (w^+) وهي مجموع الرتب الموجبة بعد عمل الجدول التالي:

قيم X	X_i-M_0	D_i	رتب D_i	R_i
8.2	-6.3	6.3	8	-8
14.1	-0.4	0.4	1	-1
10.5	-4	4	6	-6
17.8	3.3	3.3	5	5
19.7	5.2	5.2	7	7
11.5	-3	3	4	-4
6	-8.5	8.5	9	-9
28	13.5	13.5	10	10
12	-2.5	2.5	3	-3
15	0.5	0.5	2	2

وبذلك فإن ($w^+ = 24$).

ومن جداول ولكوكس لمستوى معنوية (α=0.05) نجد أن منطقة الرفض تتخذ وجهين ($w_L^+ = 8$ $w_U^+ = 47$)



وبما أن (w^+) وقعت ضمن منطقة عدم الرفض لا نرفض (H_0) أي أن المتوسط يساوي (14.5).

6-10 اختبار مان - ويتني The Mann - Whitney test:

يستخدم لاختبار الفرق بين متوسطين لعينتين مسحوبتين من مجتمعين لهما نفس الشكل من دون قيد أنهما يخضعان للتوزيع الطبيعي أو أي توزيع معروف.

لذا فإن فرضيات البحث هي:

$H_0 : M_1 = M_2$

ضد أي فرضية كأن تكون:

$H_1 : M_1 \neq M_2$
or $H_1 : M_1 < M_2$
or $H_1 : M_1 > M_2$

أما طريقة الاختبار تتحدد في الخطوات التالية:

1) إيجاد معيار الاختبار (M) من خلال الجدول التالي:

رتب R	قيمة العينة الثانية	رتب R	قيمة العينة الأولى

أما قيمة معيار الاختبار (M) تمثل مجموع الرتب الخاصة بقيم العينة الأولى وباستخدام مستوى المعنوية (α) يتم تحديد منطقة الرفض من خلال جداول خاصة.

فإذا وقعت قيمة معيار الاختبار (M) في منطقة الرفض نرفض (H_0).

أما إذا كان حجم العينة كبيراً فيمكن استخدام التوزيع الطبيعي لإجراء الاختبار حيث أن متوسط وتباين التوزيع هو:

$$M_w = \frac{n_1(n_1 + n_2 - 1)}{2} \qquad \text{.........(10-7)}$$

$$\sigma_w^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 - n_2 - 1)}{12} \qquad \text{.........(10-8)}$$

مثال (6.10):

لمقارنة نوعين من طرائق التدريس سجلت علامات خمسة طلبة خضعوا لهذه الطرق فكانت علاماتهم كالآتي:

الطريقة الثانية	الطريقة الأولى
88	73
80	100
93	79
90	77
98	86

اختبر فيما إذا كانت البيانات تعطي أدلة كافية على أن الطريقة الأولى في التدريب أسهل من الثانية، استخدم (α=0.05).

الحل:

❖ فرضيات البحث في هذه الحالة:

$H_0 : M_1 = M_2$
$H_1 : M_1 < M_2$

❖ نحول القيم إلى رتب:

الطريقة الثانية	الطريقة الأولى
6	1
4	10
8	3
7	2
9	5
	21

وبذلك فإن قيمة (M) هي (M=21) وباستخدام (α=0.05) وبالرجوع إلى جداول مان ويتني تكون منطقة الرفض كالآتي:

منطقة عدم رفض (H_0)
19

وما دامت (M=21) وقعت في منطقة عدم الرفض تقبل (H_0) وهذا يعني أن لا يوجد فرقاً في كلا الطريقتين في التدريس.

مثال (7.10):

كان عدد المسجلين في خمسة عشر نادي رياضي في خلال الشهر السابق كالآتي:

المركز الرياضي	الإناث	الذكور
1	20	15
2	65	60
3	80	90
4	100	120
5	12	10
6	18	12
7	80	70
8	40	30
9	20	15
10	75	80
11	25	30
12	30	35
13	34	20
14	55	30
15	78	70

هل أن توزيع المسجلين في هذه النوادي الرياضية متساوي حسب الجنس؟

الحل:

❖ فرضية البحث هي:

$H_0 : M_1 = M_2$
$H_1 : M_1 \neq M_2$

❖ نجد قيمة معيار الاختبار (M) من الجدول التالي:

المركز الرياضي	الإناث	الذكور	رتب الإناث	رتب الذكور
1	20	15	8	4.5
2	65	60	20	19
3	80	90	26	28
4	100	120	29	30
5	12	10	2.5	1
6	18	12	6	2.5
7	80	70	26	21.5
8	40	30	17	12.5
9	20	15	8	4.5
10	75	80	23	26
11	25	30	10	12.5
12	30	35	12.5	16
13	34	20	15	8
14	55	30	18	12.5
15	78	70	24	21.5
			245	

$$M = 245$$

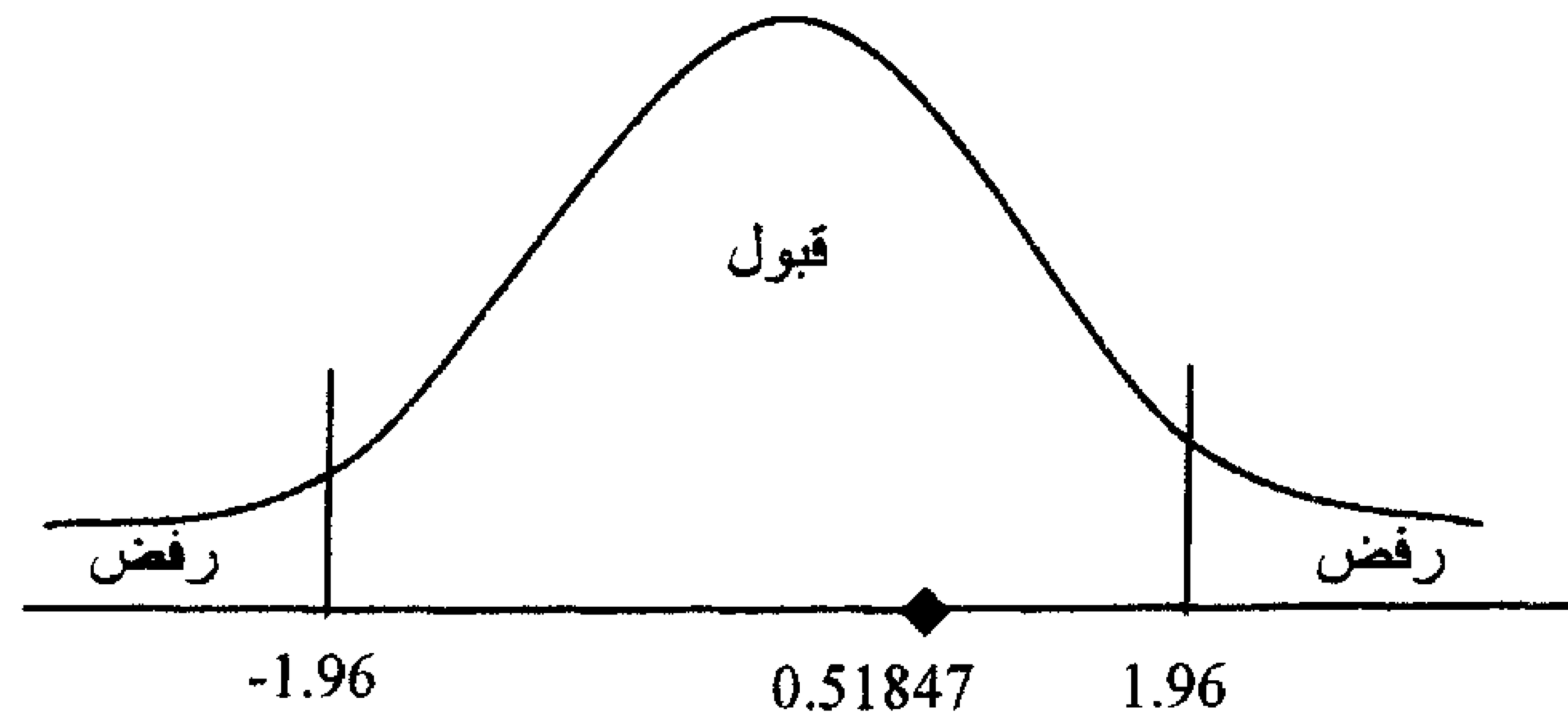
$$M_M = \frac{n_1(n_1 + n_2 - 1)}{2} = \frac{(15)(15+15+1)}{2} = 232.5$$

$$\sigma_M^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} = 581.25$$

وبذلك فإن قيمة (Z) المحسوبة هي:

$$Z = \frac{M - M_M}{\sigma_M} = \frac{245 - 232.5}{\sqrt{581.25}} = 0.51847$$

وبالرجوع لجداول التوزيع الطبيعي ولمستوى معنوية (α) أو $\left(0.025 = \frac{0.05}{2}\right)$ تكون المناطق الحرجة والقيم الحرجة كالآتي:



وبما أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة القبول تقبل (H_0) ولا يوجد فرقاً في عدد المسجلين بالنسبة للجنس.

10-7 اختبار كروسكل - والس The Kruskal - Wallis Test:

وهو اختبار تساوي عدة متوسطات بدون فرضية خضوع مجتمعاتهم للتوزيع الطبيعي. والفرضية الرئيسة لهذا الاختبار:

$H_0 : M_1 = M_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = M_k$

ضد الفرضية:

H_1 : على الأقل متوسط واحد مختلف من هذه المتوسطات

ويمكن إيجاد معيار أو إحصاءة الاختبار بعد استخراج الجدول التالي:

قيم العينة (1)	الرتب R_1	قيمة العينة (2)	R_2	...	قيم العينة K	R_K
...	...	...	...	...	...	...

ونحسب بعد ذلك (H) بالصيغة التالية:

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \quad \frac{R_j^2}{n_j} - 3(n+1) \qquad \ldots\ldots\ldots(10\text{-}9)$$

حيث أن $(R_1, R_2, \dots, R_k)$ تمثل مجموع الرتب المستخرجة من العينات (الأولى، والثانية، .... ، K) أما (n) فتمثل مجموع عدد المفردات.

وتتوزع (H) توزيع مربع كاي بدرجة حرية (k-1) حيث أن (k) تمثل عدد العينات المسحوبة من (k) من المجتمعات بعد ذلك نحدد منطقة الرفض والقبول من خلال تحديد المساحات الحرجة والقيم الحرجة ويتخذ القرار بالرفض أو القبول حسب هذه المساحات والقيم الحرجة.

مثال (8.10):

كانت الأجور اليومية لثلاث معامل تتبع الشركة (ABC) كالآتي:

عامل غير ماهر	عامل ماهر	موظف	مهندس	المعمل
30	40	60	100	A
20	30	50	80	B
30	40	60	80	C

هل تعتقد أن معدل الأجور متساوي بالنسبة للمعامل الثلاثة، اختبر بمستوى معنوية (0.01).

الحل:

❖ فرضيات البحث في هذه الحالة:

$H_0 : M_1 = M_2 = M_3$

$H_1 :$ على الأقل أحد المتوسطات مختلف

رتب المعمل C	رتب المعمل B	رتب المعمل A	المهنة
10.5	10.5	12	مهندس
8.5	7	8.5	موظف
5.5	3	5.5	عامر ماهر
3	1	3	عامل غير ماهر
27.5	21.5	29	

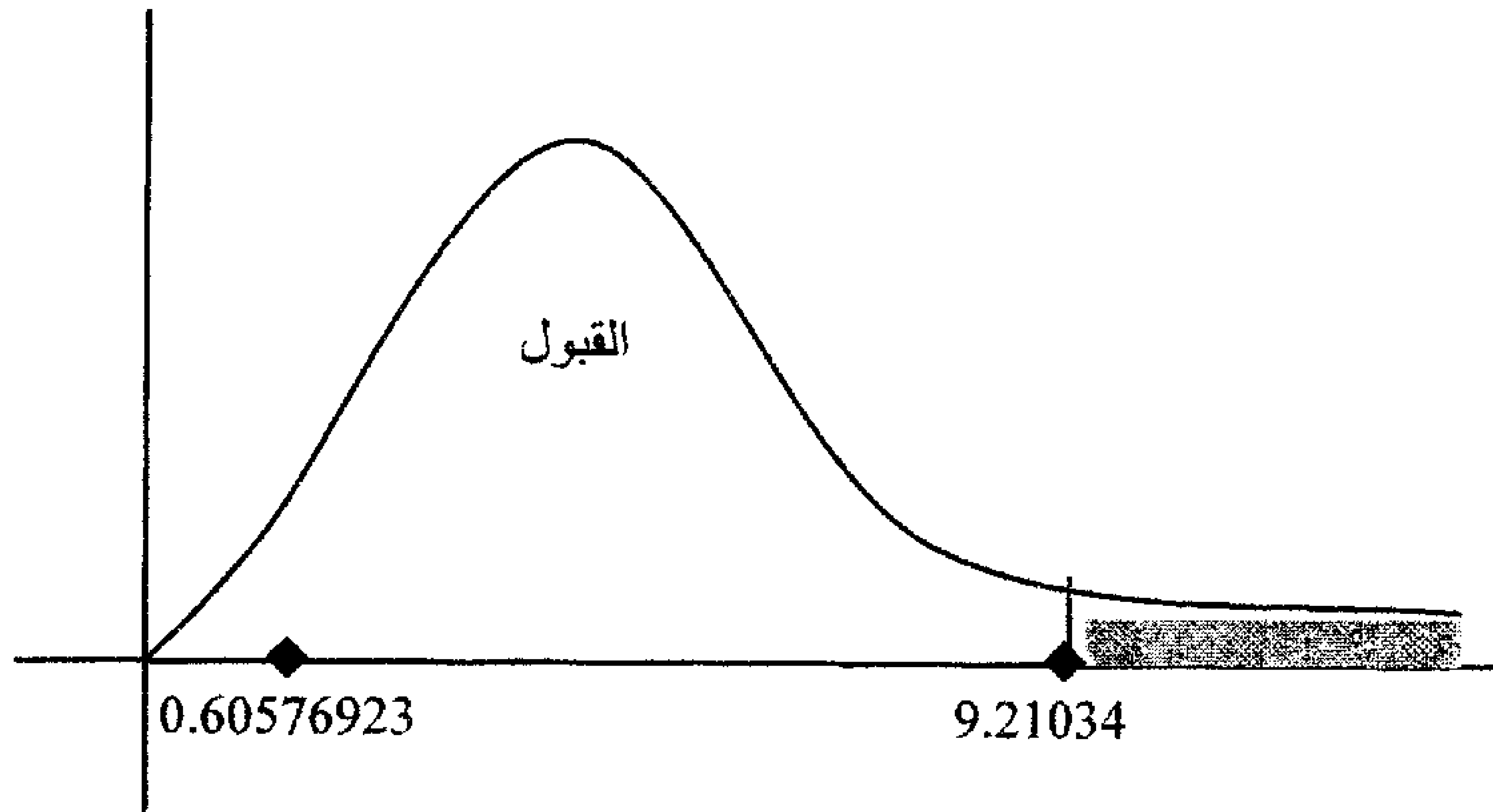
$$H = \frac{12}{(12)(13)}\left[\frac{(29)^2}{4}+\frac{(21.5)^2}{4}+\frac{(27.5)^2}{4}\right]-3(13)$$

$$= 0.60576923$$

وباستخدام $(\alpha=0.01)$ وبالرجوع إلى جدول توزيع مربع كاي بدرجة حرية (2) نجد أن القيمة الجدولية:

$$\chi^2_{(2,0.01)} = 9.21034$$

وبذلك فإن المساحة الحرجة والقيمة الحرجة هي:



ومن ملاحظة الشكل أعلاه نجد أن قيمة (H) المحسوبة وقعت في منطقة القبول لذا تقبل (H_0) أي أن المتوسطات الثلاثة متساوية.

أمثلة محلولة

مثال (9.10):

البيانات التالية تمثل حجم الأرباح لعشرة معامل تنتج نفس المنتج، اختبر أن الوسيط في الأرباح هو (11) ألف دينار.

تسلسل المعمل	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
حجم الأرباح بآلاف الدنانير	10	15	8	20	12	16	11	9	7	18

الحل:

❖ فرضيات البحث هي:

$H_0 : Me = 11$ or $H_0 : P(+) = P(-) = \frac{1}{2}$

$H_1 : Me \neq 11$ or $H_1 : P(+) \neq P(-)$

تسلسل المعمل	الأرباح	الإشارة
1	10	-
2	15	+
3	8	-
4	20	+
5	12	+
6	16	+
7	11	0
8	9	-
9	7	-
10	18	+

من ملاحظة الجدول أعلاه نجد أن عدد الإشارات السالبة هو خمسة إشارات $(K = 5)$ لذا نجد الاحتمال وكالآتي:

$$P(K \leq 5/9,0.5) = \sum_{k=0}^{5} C_k^9 (0.5)^k (0.5)^{9-k}$$

$$= C_0^9 (0.5)^0 (0.5)^9 + C_1^9 (0.5)^1 (0.5)^8 + C_2^9 (0.5)^2 (0.5)^7 + C_3^9 (0.5)^3 (0.5)^6 + C_4^9 (0.5)^4 (0.5)^5 + C_5^9 (0.5)^5 (0.5)^4$$

$$= 0.001953125 + 0.017578125 + 0.0703125 + 0.1640625 + 0.24609375 + 0.24609375$$

$$= 0.74609375$$

❖ **القرار:** بما أن الاختبار من جانبين لذا تقارن قيمة الاحتمال المستخرج مع قيمة $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ أي (0.025) ويمكن ملاحظة أن قيمة الاحتمال أكبر من (0.025) لذا تقبل فرضية العدم (H_0) أي أن الوسيط مساوي إلى (11).

مثال (10.10):

البيانات التالية عدد المعاملات الضريبية المنجزة لفرعين من فروع إحدى مديريات الضريبة. هل تعتقد أن هناك فروقاً معنوية في معدل المعاملات المنجزة ما بين الفرعين؟

الشهر	الفرع الأول	الفرع الثاني
1	80	75
2	60	40
3	75	65
4	70	60
5	60	60
6	74	70
7	60	55
8	71	61
9	81	70
10	88	60
11	73	73
12	70	72

الحل:

❖ فرضية البحث:

$$H_0 : P = \frac{1}{2}$$

$$H_1 : P \neq \frac{1}{2}$$

الفرع الأول	الفرع الثاني	الإشارة
80	75	+
60	40	+
75	65	+
70	60	+
60	60	0
74	70	+
60	55	+
71	61	+
81	70	+
88	60	+
73	73	0
70	72	-

من الجدول يمكن ملاحظة أن (n=10) لأنه تم إهمال إشارتين عندما كان القيمة مساوية للصفر أما عدد الإشارات السالبة فهي (k=12) وبذلك فإن الاحتمال هو:

$$P(K \leq 1/10, \frac{1}{2}) = C_0^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_1^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$$

$$= 0.0009765625 + 0.0009765625$$

$$= 0.010742187$$

❖ **القرار:** نقارن قيمة الاحتمال مع قيمة ($\frac{\alpha}{2} = 0.025$) فنجد أن قيمة الاحتمال أصغر من القيمة (0.025) وعليه نرفض (H_0) أي أن هناك فروقاً معنوية بين الفرعين في إنجاز معاملاتهم الضريبية.

مثال (11.10):

تم سحب عينة عشوائية من الإنتاج اليومي لمعملين من معامل الشركة لعدد من الأيام وسجل عدد ساعات التوقف في المكائن نتيجة العطل خلال كل شهر من أشهر السنة فكانت كالآتي:

المعمل (1)	المعمل (2)
5	7
8	8
8	6
10	7
4	8
3	8
6	5
8	4
9	3
6	6
12	8
10	8

هل تعتقد أن هناك فروقاً بين الوسيط في عدد ساعات التوقف لكلا المعملين؟

الحل:

❖ ندمج العينتين معاً ونستخرج الوسيط:

3 3 4 4 5 6 6 6 6 7 7 8 8
8 8 8 8 8 8 9 10 10 12

ترتيب الوسيط $\frac{n+1}{2} = \frac{24+1}{2} = 12.5$ (القيمة المرتبة العاشرة)

$Me = 7.5$

نكون الجدول التالي:

	المعمل (1)	المعمل (2)	مجموع
أكبر من الوسيط	7	5	12
أصغر من الوسيط	5	7	12
المجموع	12	12	

$$\chi^2 = \frac{|7\times7-5\times5| \div \frac{24}{2}^{\;2} \times 24}{12\times12\times12\times12}$$

$$= 0.00023148148$$

❖ **القرار:** إن قيمة مربع كاي لمستوى معنوية (0.05) ودرجة حرية (1) هو (3.841) وبما أن قيمة مربع كاي المحسوبة أصغر من الجدولية تقبل (H_0) أي أن العينتين مسحوبتين من مجتمعين لهما نفس الوسيط.

مثال (12.10):

سجلت الأجور اليومية لعشرة عمال يعملون في أحد المعامل الإنتاجية وكانت كالآتي:

الإنفاق اليومي (دينار)
20
18
30
40
15
35
45
40
42
25

هل تعتقد أن متوسط الإنفاق الأسري اليومي لا يقل عن (30) دينار؟ اختبر بمستوى معنوية 0.05..

الحل:

❖ فرضيات الاختبار:

$H_0 : M \geq 30$
$H_1 : M < 30$

$$Mw = \frac{10(11)}{4} = 27.5$$

$$\sigma^2 w^+ = \frac{10(11)(21)}{24} = 96.25$$

❖ نجد (w^+) حسب الجدول التالي:

قيم X	$X_i - M_0$	D_i	رتب D_i	R_i
20	-10	10	5	-5
18	-12	12	7	-7
30	0	0	0	0
40	10	10	5	5
15	-15	15	8.5	-8.5
35	5	5	2.5	2.5
45	15	15	8.5	8.5
40	10	10	5	5
32	2	2	1	1
25	-5	5	2.5	-2.5

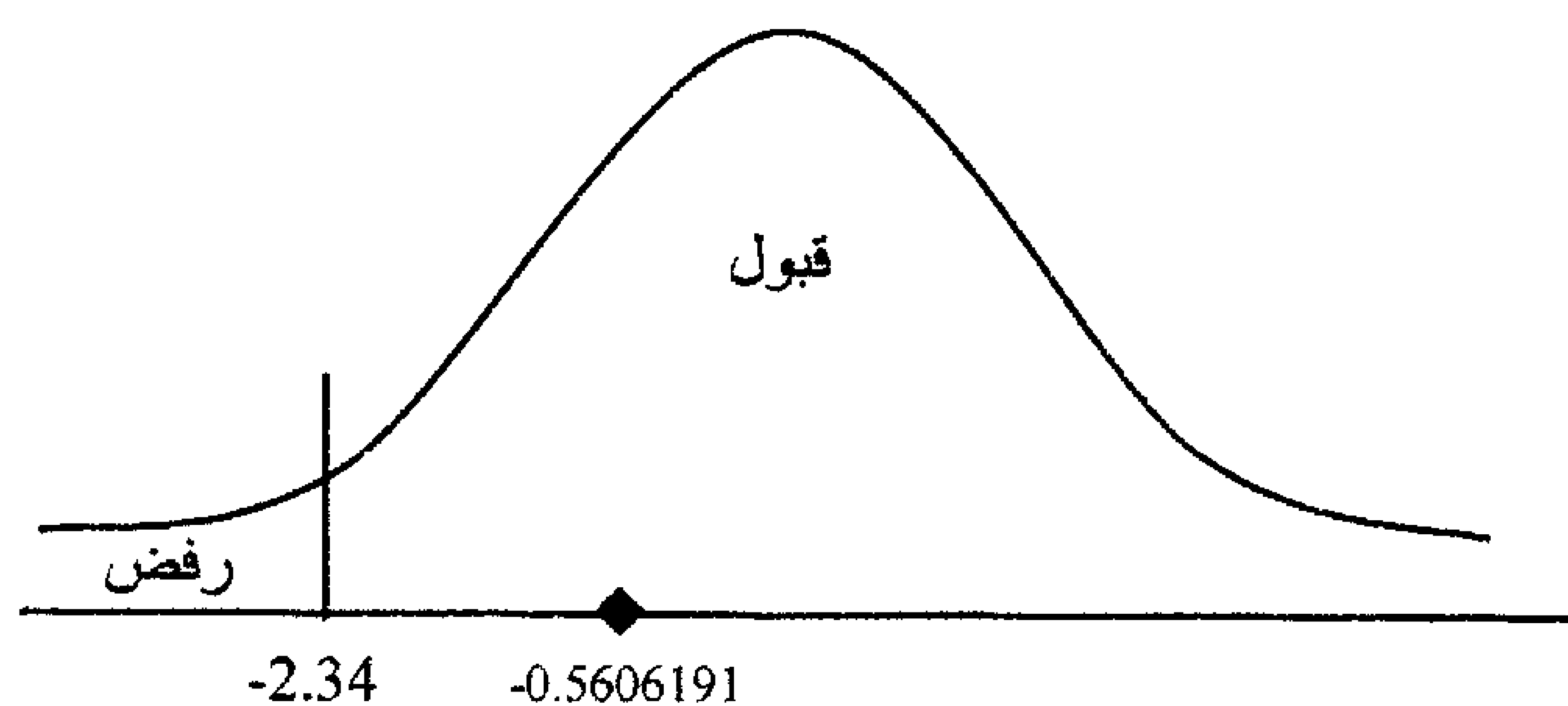
$w^+ = 22$

$$Z = \frac{22 - 27.5}{\sqrt{96.25}} = -0.5606119$$

وبالرجوع لجدول التوزيع الطبيعي القياسي تكون قيمة (Z) الجدولية لمستوى معنوية (0.05) هي:

$Z_{0.05} = 2.34$

وبذلك تكون المساحة الحرجة والقيم الحرجة يمكن تمثيلها بالشكل التالي:



وبملاحظة الشكل أعلاه نجد أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة القبول لذا تقبل فرضية العدم (H_0) أي أن متوسط الإنفاق الأساسي اليومي لا يقل عن (30) دينار.

مثال (13.10):

لمقارنة مستوى المتخرجين من جامعتين تدرس نفس التخصص، أخضع عدد من طلبة كل جامعة لاختبار وكانت علامات الطلبة في هذا الاختبار كالآتي:

الجامعة B	الجامعة A
99	99
99	98
98	95
97	90
97	89
90	88
90	87
89	87
89	86
89	85
88	85
87	84

اختبر فيما إذا كانت البيانات تعطي أدلة كافية على أن مستوى الطلبة في الجامعة الثانية أفضل من الجامعة الأولى؟ استخدم مستوى معنوية 0.05.

الحل:

❖ فرضيات البحث هي:

$H_0 : M_1 = M_2$
$H_1 : M_1 < M_2$

الجامعة A	الجامعة B	رتب الجامعة A	رتب الجامعة B
99	99	24	24
98	99	21.5	24
95	98	18	21.5
90	97	16	19.5
89	97	12.5	19.5
88	90	8.5	16
87	90	6	16
87	89	6	12.5
86	89	4	12.5
85	89	2.5	12.5
85	88	2.5	8.5
84	87	1	6
		122.5	

$M = 122.5$

$$M_M = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{12(12+12+1)}{2} = 150$$

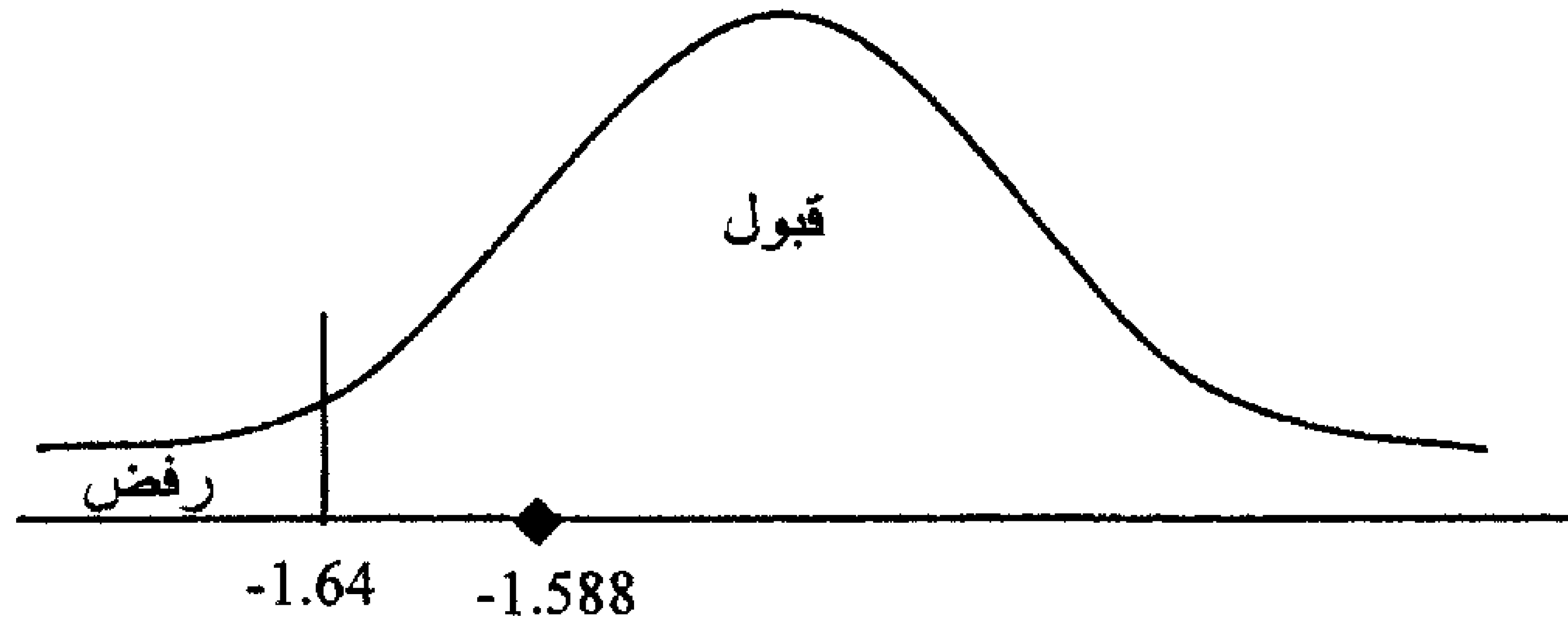
$$\sigma_M^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} = \frac{12(12)(25)}{12} = 300$$

$$Z = \frac{M - M_M}{\sigma_M} = \frac{122.5 - 150}{\sqrt{300}} = \frac{-27.5}{17.32050808} = -1.588$$

وبالرجوع لجداول (Z) فإن قيمة ($Z_{0.05}$) هي:

$Z_{0.05} = 1.64$

وبذلك فإن المساحة الحرجة هي:



❖ القرار: وبما أن قيمة (Z) المحسوبة وقعت في منطقة القبول (لاحظ الشكل أعلاه) تقبل فرضية العدم (H_0) أي أن مستوى الطلبة في الجامعتين متساوي.

مثال (14.10):

البيانات التالية تمثل المبيعات لثلاثة سلع ينتجها كل معمل من المعامل الثلاثة التابعة للشركة (X Y Z) هل تعتقد أن معدل المبيعات متساوي بالنسبة للمعامل الثلاث؟ اختبر بمستوى معنوية 0.05.

مبيعات السلعة 3	مبيعات السلعة 2	مبيعات السلعة 1	المعمل
7	6	5	A
2	3	4	B
2	3	4	C

الحل:

❖ فرضيات البحث في هذه الحالة:

$H_0 : M_1 = M_2 = M_3$

H_1 : على الأقل أحد المتوسطات مختلف

رتب المعمل 3	رتب المعمل 2	رتب المعمل 1	السلعة
9	8	7	1
1.5	3.5	5.5	2
1.5	3.5	5.5	3
12	15	18	

$$H=\frac{12}{(9)(10)}\quad\frac{(18)^2}{3}+\frac{(15)^2}{3}+\frac{(12)^2}{3}\quad-3(10)$$

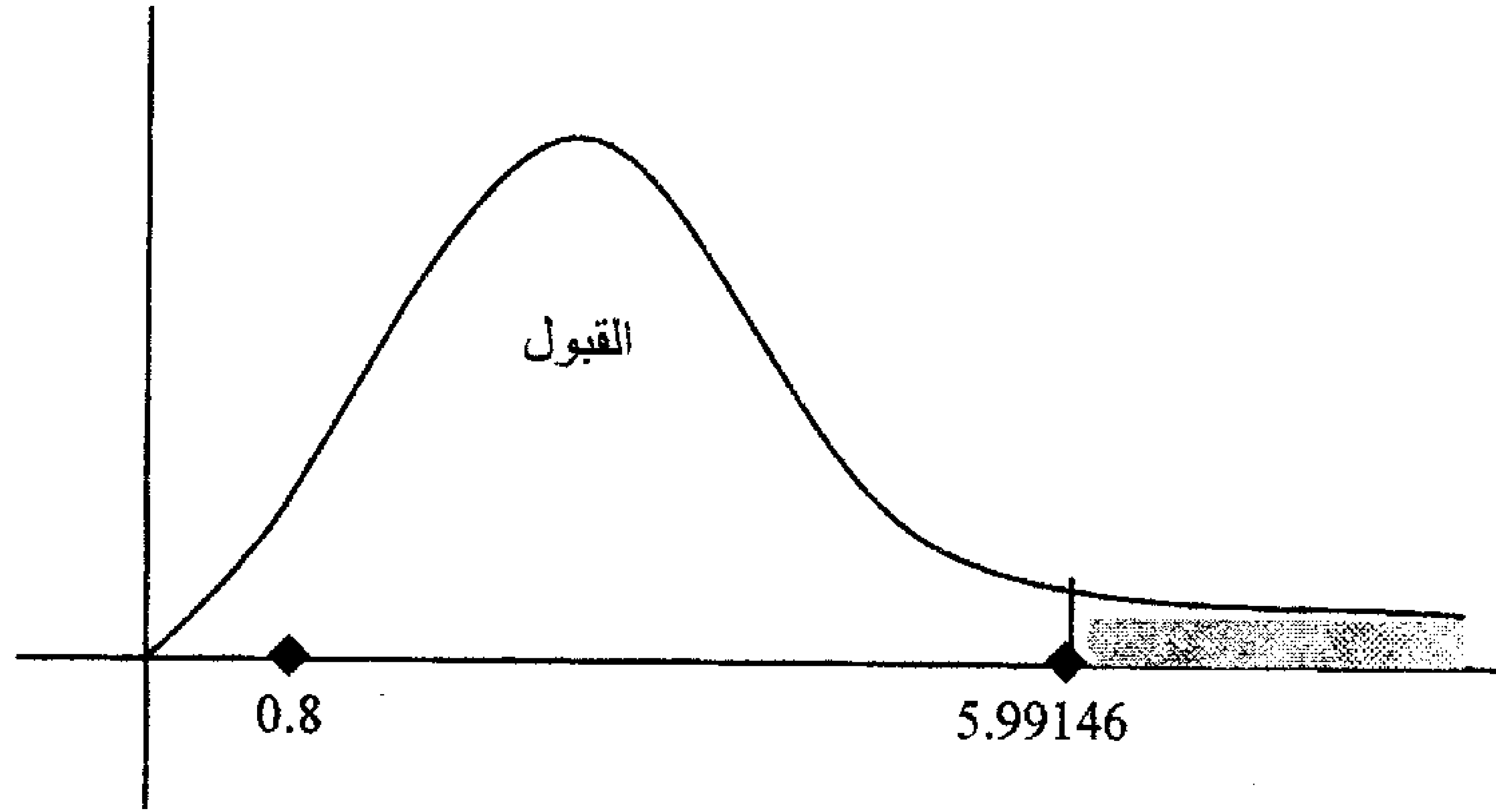
$$=\frac{12}{90}[108+75+48]-30$$

$$=0.8$$

وباستخدام $(\alpha=0.01)$ وبالرجوع إلى جدول توزيع مربع كاي بدرجة حرية (2) نجد أن القيمة الجدولية:

$$\chi^2_{(2,0.05)}=5.99146$$

وبذلك فإن المساحة الحرجة والقيمة الحرجة هي:



❖ القرار: بما أن قيمة (H) المحسوبة وقعت في منطقة القبول نقبل (H_0) ولا يوجد فروقات في متوسط المبيعات للمعامل الثلاثة.

أسئلة الفصل العاشر

1) البيانات التالية تمثل حجم المبيعات (بالآف الدنانير) خلال أشهر السنة لأحد المعامل، اختبر بمستوى معنوية (0.01) أن الوسيط في المبيعات هو 10.

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المبيعات	12	11	10	13	14	13	10	10	9	8	9	8

2) البيانات التالية تمثل عدد الوحدات المنتجة لمعملين تابعين لنفس الشركة. هل تعتقد أن هناك فروقاً معنوية في معدل الوحدات المنتجة بين المعملين؟ اختبر بمستوى معنوية 0.01.

الفصل	المعمل الأول	المعمل الثاني
1	30000	45000
2	45000	40000
3	50000	45000
4	60000	54000

3) تم إجراء تطوير لمكائن أحد المعامل لزيادة عدد الوحدات المنتجة بالساعة الواحدة فكانت النتائج كالآتي:

عدد الوحدات المنتجة بعد التطوير	عدد الوحدات المنتجة قبل التطوير	الماكنة
12	10	1
10	8	2
7	7	3
9	9	4
7	8	5

هل تعتقد أن هناك فروقاً في الوسيط للماكنة قبل وبعد التطوير؟ اختبر بمستوى معنوية 0.01.

4) البيانات التالية تمثل عدد المعاملات المنجزة في أحد البنوك لاثنا عشر شهراً:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
عدد المعاملات المنجزة	50	55	60	65	60	60	55	70	75	70	80	70

هل تعتقد أن متوسط عدد المعاملات المنجزة لا يزيد عن (65)؟ اختبر بمستوى معنوية 0.01.

5) لمقارنة الإنتاج اليومي في معملين لنفس الشركة تنتج نفس المنتج سحبت عينة من كل معمل فكانت كالآتي:

اليوم	المعمل الأول	المعمل الثاني
1	5000	4000
2	4000	3000
3	3500	2000
4	4500	4500
5	5000	4500
6	4500	5000
7	3200	3200
8	3300	4100
9	4200	3400
10	4100	5000

اختبر فيما إذا كانت البيانات تعطي أدلة كافية على أن مستوى الإنتاج في المعملين متساوي من حيث المتوسط؟ استخدم $\alpha = 0.01$.

6) البيانات التالية تمثل المبيعات لثلاثة أسواق رئيسة في المدينة، هل تعتقد أن معدل المبيعات متساوي لهذه الأسواق؟ اختبر بمستوى معنوية 0.01.

مبيعات السلع الكمالية	مبيعات السلع الغذائية	السوق
4000	5000	1
3000	6000	2
2000	7000	3

المراجـــــع

أولاً- المراجع العربية:

1. أبو صالح، محمد صبحي (2009)، الطرق الإحصائية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان ـ الأردن.
2. القاضـي، دلال وآخـرون (2003)، الإحـصاء للإداريـين والاقتـصاديين، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان ـ الأردن.
3. المشهداني، كمال علوان وعبودي، عمان حازم (2009)، اختبار الفرضيات الإحصائية، مكتب الجزيرة للطباعة والنشر، بغداد ـ العراق.
4. المشهداني، كمال علوان، الشمري، نزير عباس (2011)، إحصاء المال والأعمال، مكتب الجزيرة للطباعة والنشر، بغداد ـ العراق.
5. النجار، ظافر حسين، النجار، صباح مجيد، الشاهر، ثائر فيصل (2005)، الأساليب الكمية للإدارة، مطبعة جامعة بغداد، بغداد ـ العراق.

ثانياً- المراجع الأجنبية:

6. Attwood G., Dyer G., Skipworth. G. (2000), Statistics 1, Bath Press, UK.
7. Foller, W. (2009), An Introduction to Probability Theory and its Application, 2nd Edition, Jon Wiely and Sons, New York, Inc.
8. Levine, D. M. & Krehbiel, T.C. & Berenson, M.L (2003), Business Statistics: A First Course, 3rd Edition, Prentice Hall.
9. Raqab, M.Z. & Awad, A. M. & Azzam, M. (2005), Principles of Statistics, 2nd Edition, Academic for Piblishing & Distributing Co., Amman - Jordan.
10. Weiss, N.A. (2004), Introduction Statistics, 7th Edition, Addison Wesly Longman, New York, Inc.

الملاحق

الملحق (1)

الأخطاء المعيارية لبعض المؤشرات الإحصائية

ت	المؤشر الإحصائي	رمزه	الخطأ المعيار للمؤشر الإحصائي (المقرر)
١	الوسط الحسابي	$\bar{X}$	$S.E(\bar{X}) = S_x./\sqrt{n}$
٢	الانحراف المعياري	S_x	$S.E(S_x) = S_x/\sqrt{2n}$
٣	التباين	S_x^2	$S.E(S_x^2) = S_x^2\sqrt{2/n}$
٤	النسبة	P	$S.E(p) = \sqrt{P.(1-p)/n}$
٥	معامل الارتباط البسيط، معامل ارتباط الرتب	r	$S.E(r) = \sqrt{1-r^2}/\sqrt{n-2}$
٦	معامل الانحدار البسيط	$\hat{b}$	$S.E(\hat{b}) = \sqrt{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 / [(n-2)\sum (x_i - \bar{x})^2]}$
٧	الفرق بين وسطين حسابيين	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$S.E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$
٨	الفرق بين انحرافين معيارين	$S_1 - S_2$	$S.E(S_1 - S_2) = \sqrt{\frac{S_1^2}{2n_1} + \frac{S_2^2}{2n_2}}$
٩	الفرق بين نسبتين	$P_1 - P_2$	$S.E(P_1 - P_2) = \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$

الملاحق (2)

جدول (1)

التوزيع الطبيعي القياسي

$$F(Z) = P_r(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)$$

$$Z \sim N(0,1)\ ,-\infty < Z < \infty$$

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.0	.0013	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000
-2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0238	.0233
-1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0570	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0964	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0943	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

تابع الجدول رقم (1)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9430	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	9495	.9505	.9515	.9525	.9535	..9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9648	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.0	.9772	9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9874	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.	.9987	.9990	.9993	.9995	.9997	.9998	.9998	.9999	.9999	1.0000

الجدول رقم (2)

توزيع (t)

$$F(t) = P_r\,(t \leq t_n\,(\alpha) = 1 - \alpha$$

$$t \sim t_{(n)} : -\infty < t < \infty$$

n \ α	.60	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9975	.999	.9995
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	٦38.82
2	.089	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.508
3	.277	.765	1.638	2.353	3.128	4.511	5.841	7.453	10.214	12.024
4	.271	.741	1.633	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.٦10
5	.207	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	٦.8٦0
6	.205	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.969
7	.203	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.40٨
8	.202	.706	1.397	1.860	2.306	2.898	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.201	.703	1.383	1.833	2.202	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.200	.700	1.372	1:812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.200	.697	1.363	1.796	2.2	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	·1	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.179	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.160	2.624	2.977	3.328	3.787	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.145	2.602	2.947	3.280	3.733	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.131	2.583	2.921	3.252	3.٦86	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.120	2.5٦7	2.898	3.222	3.640	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.110	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.101	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.093	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.086	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	.256	.686	1.321	1.717	2.080	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	.256	.685	1.319	1.714	2.074	2.500	2.807	3.104	3.485	3.7٦7
24	.256	.685	1.318	1.711	2.069	2.492	2.797	3.091	3.467	3.746
25	.256	.684	1.316	1.708	2.064	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	.256	.684	1.315	1.706	2.060	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	.256	.684	1.314	1.703	2.056	2.473	2.771	3.037	3.421	3.٦٩0
28	.256	.683	1.313	1.701	2.052	2.4٦7	2.763	3.047	3.408	3.٦74
29	.256	.683	1.311	1.699	2.048	2.462	2.756	3.038	3.396	3.٦59
30	.256	.683	1.310	1.697	2.045	2.457	2.750	3.030	3.385	3.٦46
40	.255	.681	1.303	1.684	2.042	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	.254	.679	1.296	1.671	2.021	2.390	2.660	2.915	3.232	3.4٦0
120	.254	.677	1.289	1.658	2.000	2.358	2.617	2.800	3.160	3.373
∞	.253	.674	1.282	1.645	1.080	2.326	2.570	2.807	3.090	3.291
					1.960					

جدول رقم (3)

جدول توزيع F

$\alpha = 0.05$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.22	9.10	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.75	2.21
14	4.6	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

تابع جدول رقم (3)

$\alpha = 0.01$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6023	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.71	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.79	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

جدول رقم (4)

توزيع مربع كاي

$$F(\chi^2) = P_r\left(\chi^2 \le \chi_n^2(\alpha)\right) = 1-\alpha$$

$$\chi^2 \sim \chi^2_{(n)} \quad , \quad 0 < \chi^2 < \infty$$

n \ α	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50
1	302704.10^{-10}	157088.10^{-9}	982000.10^{-9}	393214.$10^{-٨}$	.0157908	.1015308	.454936
2	.0100251	.0201007	.0500356	.102587	2.10721	.575364	1.38629
3	.0717218	.114832	.215795	.351846	.584374	1.212534	2.36597
4	.206980	.207109	.484419	.710723	1.063623	1.92256	3.35669
5	.411742	.554208	.831212	1.145476	1.61031	2.67460	4.35145
6	.075727	.872000	1.23734	1.63538	2.20413	3.45460	5.34812
7	.989256	1.239043	1.08087	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581
8	1.34441	1.04050	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412
9	1.73493	2.08790	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283
10	2.15580	2.55821	3.21697	3.94030	4.85518	6.73720	9.34182
11	2.60322	3.05348	3.81576	4.57481	5.57778	7.58414	10.3410
12	3.07382	3.57057	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.3403
13	3.56503	4.10092	5.00875	5.89186	7.04150	9.29907	12.3398
14	4.07467	4.00043	5.62873	6.57063	7.78953	10.1653	13.3393
15	4.60092	5.22935	6.20214	7.26094	8.54676	11.0365	14.3389
16	5.14221	5.81221	6.90766	7.96105	9.31224	11.9122	15.3385
17	5.69722	6.40770	7.56419	8.67176	10.0852	12.7919	16.3382
18	6.20480	7.01491	8.23075	9.39040	10.8094	13.6753	17.3379
19	6.84397	7.03273	8.90652	10.1170	11.6509	14.5620	18.3377
20	7.43384	8.20040	9.59078	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374
21	8.03365	8.80720	10.28293	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372
22	8.04272	8.54240	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370
23	9.26043	10.10507	11.6886	13.0905	14.8480	18.1373	22.3369
24	9.88023	10.8504	12.4012	13.8484	15.0587	19.0373	23.3367
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366
26	11.1662	12.1081	13.8439	15.3792	17.2919	20.8434	25.3365
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	21.7494	26.3363
28	12.4613	13.5047	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3362
29	13.1211	14.2505	16.0471	17.7084	19.7677	23.5666	28.3361
30	13.7867	14.0535	16.7908	18.4927	20.5992	24.4776	29.3360
40	20.7065	22.1043	24.4330	26.5093	29.0505	33.6603	39.3353
50	27.9907	20.7007	32.3574	34.7643	37.6886	42.9421	49.3349
60	35.5345	37.4840	40.4817	43.1880	46.4589	52.2938	59.3347
70	43.2752	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	61.6983	69.3345
80	51.1719	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778	71.1445	79.3343
90	59.19٦3	01.7541	65.6466	69.1200	73.2911	80.6247	89.3342
100	٦٧.3270	70.0040	74.2219	77.9295	82.3581	90.1332	99.2241

تابع جدول رقم (4)

n \ α	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.999
1	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63400	7.87044	10.828
2	2.77259	4.60517	5.99146	7.3776	9.21034	10.5000	13.816
3	4.10834	6.25139	7.81473	9.34840	11.3440	12.8382	16.266
4	5.38527	7.77944	9.48773	11.1433	13.2707	14.8003	18.467
5	6.62568	9.23636	11.0705	12.8325	15.0803	10.7400	20.515
6	7.84080	10.6116	12.5916	14.4494	16.8110	18.5470	22.458
7	9.03715	12.0170	14.0671	10.0128	18.4753	20.2777	24.322
8	10.2189	13.3616	15.5073	17.5345	20.0002	21.0550	26.125
9	11.3888	14.6837	16.9190	19.0228	21.0000	23.5804	27.877
10	12.5489	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882	29.588
11	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	267568	31.264
12	14.8454	18.5193	21.0261	23.3307	26.2170	28.2995	32.909
13	15.9839	19.8119	22.3620	24.7356	27.0882	29.8105	34.528
14	17.1169	21.0611	23.6848	20.1189	20.1412	31.3104	36.123
15	18.2451	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.697
16	19.3689	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2072	39.252
17	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	40.790
18	21.6049	25.9894	28.8693	31.5204	34.8053	37.1505	42.312
19	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	30.1999	38.5823	43.820
20	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	30.0008	45.315
21	24.9348	29.6151	32.6706	35.4780	38.9322	41.4011	46.797
22	20.0393	30.8133	33.9244	30.7807	40.2804	42.7057	46.268
23	27.1413	32.0069	35.1725	38.0750	41.6384	44.1831	49.728
24	28.2412	33.1962	30.4150	39.3041	42.9798	45.5585	51.179
25	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	40.0270	52.618
26	30.4346	35.6632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2800	54.052
27	31.5284	30.7412	40.1133	43.1945	46.9629	40.0119	55.476
28	32.6205	37.0159	41.3371	44.4608	48.2782	50.0034	56.892
29	33.7109	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3350	58.301
30	34.7997	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.0720	59.703
40	45.6160	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	69.7000	73.402
50	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	76.4000	86.661
60	66.9815	74.3971	70.0819	83.2077	88.3794	91.9517	99.607
70	77.5767	85.5270	90.5312	95.0232	100.425	104.215	112.317
80	88.1303	96.5782	101.879	100.629	112.320	110.321	124.830
90	98.6499	107.565	113.145	118.136	124.116	128.209	137.208
100	109.141	118.498	124.342	129.561	135.807	140.109	149.449

جدول رقم (5)

توزيع ثنائي الحدين

$$P(\chi) = C_{\chi}^{n} P^{\chi} (1-P)^{n-\chi}$$

$$\chi = 0, 1, 2, \dots n$$

$$0 < P < 1$$

P

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	6000	.5500	.5000
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
2	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0150	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	2500
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	2500
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
5	1	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0004	.0022	.0004	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.15٦2
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	0102	.0185	.0312
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1170	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0٩38
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0٠١٦
	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.007٨
7	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1٦41
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1٦41
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
8	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	.0004	.0046	.0815	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039

تابع جدول رقم (5)

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0005	.0339	.0176
	2	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	.0000	.0001	.0000	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0716
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
10	1	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0196	.0229	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.3293	.3835	.2348	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
11	2	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.1998	.1395	.0887	.0513	.0269
	3	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
	4	0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
	5	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1321	.1830	.2207	.2360	.2256
	6	.0000	.0003	.0023	.0097	.0208	.0566	.0985	.1471	.1931	.2256
	7	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
	8	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
	0	.5404	.2824	.1422	.0087	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
12	1	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
	2	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
	3	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
	4	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
	5	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
	6	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.1766	.2124	.2256
	7	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
	8	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0015	.0018	.0125	.0277	.0537
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.3512	.3672	.2774	.1787	.1029	.0540	.0259	.0113	.0045	.0016
	2	.1109	.2448	.2937	.2680	.2059	.1388	.0836	.0453	.0220	.0095
	3	.0214	.0997	.1900	.2457	.2517	.2181	.1651	.1107	.0660	.0349
	4	.0028	.0277	.0838	.1535	.2097	.2337	.2222	.1845	.1350	.0873
	5	.0003	.0055	.0266	.0691	.1258	.1803	.2154	.2214	.1989	.1571
	6	.0000	.0008	.0063	.0230	.0559	.1030	.1546	.1968	.2169	.2095
	7	.0000	.0001	.0011	.0058	.0186	.0442	.0833	.1312	.1775	.2095
	8	.0000	.0000	.0001	.0011	.0047	.0142	.0336	.0656	.1069	.1571
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0034	.0101	.0243	.0495	.0873
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0022	.0065	.0162	.0349
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0012	.0036	.0095
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	..0000	.0001

تابع جدول رقم (5)

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.3593	.3559	.2539	.1539	.0832	.0407	.0181	.0073	.0027	.0009
	2	.1229	.2570	.2912	.2501	.1802	.1134	.0634	.0317	.0141	.0056
	3	.0259	.1142	.2056	.2501	.2402	.1943	.1366	.0845	.0462	.0222
	4	.0037	.0348	.0998	.1720	.2202	.2290	.2022	.1549	.1040	.0611
	5	0004	.0078	.0352	.0860	.1468	.1963	.2178	.2066	.1701	.1222
	6	.0000	.0013	.0993	.0322	.0734	.1262	.1759	.2066	.2088	.1833
	7	.0000	.0002	.0019	.0092	.0280	.0618	.1082	.1574	.1952	.2095
	8	.0000	.0000	.0003	.0020	.0082	.0232	.0510	.0918	.1398	.1833
	9	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0066	.0183	.0408	.0762	.1222
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0014	.0049	.0136	.0312	.0611
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0033	.0093	.0222
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0019	.0056
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0009
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.00005	.0001	.0000
	1	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	.0005
	2	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032
	3	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139
	4	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417
	5	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916
	6	.0000	.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	.1914	.1527
	7	.0000	.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1961
	8	.0000	.0000	.0005	.0035	.0131	.0384	.0710	.1181	.1647	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052	.0139
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0032
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
	1	.3706	.3294	.2097	.1126	.0535	.0228	.0087	.0030	.0009	.0002
	2	.1463	.2745	.2775	.2111	.1336	.0732	.0353	.0150	.0056	.0018
	3	.0359	.1423	.2285	.2463	.2079	.1405	.0888	.0468	.0215	.0085
	4	.0061	.0514	.1311	.2001	.2252	.2040	.1553	.1014	.0572	.0278
	5	.0008	.0137	.0555	.1201	.1802	.2099	.2008	.1623	.1123	.0667
	6	.0001	.0028	.0180	.0550	.1101	.1649	.1982	.1983	.1684	.1222
	7	.0000	.0004	.0045	.0197	.0524	.1010	.1524	.1889	.1969	.1746
	8	.0000	.0001	.0009	.0055	.0197	.0487	.0923	.1417	.1812	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0012	.0058	.0185	.0442	.0840	.1318	.1746
	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0014	.0056	.0167	.0392	.0755	.1222
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0019	.0142	.0337	.0667
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0010	.0115	.0278
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0029	.0085
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
	1	.3741	.3150	.1893	.0957	.0426	.0169	.0060	.0019	.0005	.0001
	2	.1575	.2800	.2673	.1914	.1136	.0581	.0260	.0102	.0035	.0010
	3	.0415	.1556	.2359	.2393	.1893	.1245	.0701	.0341	0144	.0032
	4	.0076	.0605	.1457	.2093	.2209	.1868	.1320	.0796	.0411	.0182
	5	.0010	.0175	.0668	.1361	.1914	.2081	.1849	.1379	.0875	.0172
	6	.0001	.0039	.0236	.0680	.1276	.1784	.1991	.1839	.1432	.0944
	7	.0000	.0007	.0065	.0267	.0668	.1201	.1685	.1927	.1811	.1484
	8	.0000	.0001	.0014	.0081	.0279	.0644	.1134	.1606	.1883	.1855
	9	.0000	.0000	.0003	.0021	.0093	0276	.0611	.1070	.1540	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0004	.0025	.0095	.0263	.0571	.1008	.1484
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0026	.0090	.0242	.0525	.0944
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0081	.0215	.0472
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	0005	.0021	.0088	.0182
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052

تابع جدول رقم (5)

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
17	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
	1	.3763	.3002	.1704	.0811	.0338	.0126	.0042	.0012	.0003	.0001
	2	.1683	.2835	.2556	.1723	.0958	.0458	.0190	.0069	.0022	.0006
	3	.0473	.1680	.2406	.2297	.1704	.1046	.0547	.0246	.0095	.0031
	4	.0093	.0700	.1592	.2153	.2130	.1681	.1104	.0614	.0291	.0117
	5	.0014	.0215	.0787	.1507	.1988	.2017	.1664	.1146	.0666	.0327
	6	.0002	.0052	.0301	.0816	.1436	.1873	.1941	.1655	.1181	.0708
	7	.0000	.0010	.0011	.0350	.0820	.1376	.1792	.1892	.1657	.1214
	8	.0000	.0002	0022	.0120	.0376	.0811	.1327	.1734	.1864	.1669
	9	.0000	.0000	.0004	.0033	.0139	.0386	.0794	.1284	.1694	.1855
	10	.0000	.0000	.0001	.0008	.0042	.0149	.0385	.0771	.1248	.1669
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0046	.0151	.0374	.0742	.1214
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0047	.0145	.0354	.0708
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0134	.0327
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0039	.0117
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0009	.0031
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.3774	.2852	.1529	.0685	.0268	.0093	.0029	.0008	.0002	.0000
	2	.1787	.2852	.2428	.1540	.0803	.0358	.0138	.0046	.0013	.0003
	3	.0533	.1796	.2428	.2182	.1517	.0869	.0422	.0175	.0062	.0018
	4	.0112	.0798	.1714	.2182	.2023	.1491	.0909	.0467	.0203	.0074
	5	.0018	.0266	.0907	.1636	.2023	.1916	.1468	.0933	.0497	.0222
	6	.0002	.0069	.0374	.0955	.1574	.1916	.1844	.1451	.0949	0518
	7	.0000	.0014	.0122	.0443	.0974	.1525	.1844	.1797	.1443	.0961
	8	.0000	.0002	.0032	.0166	.0487	.0981	.1489	.1797	.1771	.1442
	9	.0000	.0000	.0007	.0051	.0198	.0514	.0980	.1464	.1771	.1762
	10	.0000	.0000	.0001	.0013	.0066	.0220	.0528	.0976	.1449	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0077	.0233	.0532	.0970	.1442
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0022	.0083	.0237	.0529	.0961
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0085	.0233	.0518
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0082	.0222
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0022	.0074
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
	1	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0008	.0020	.0005	.0001	.0000
	2	.1887	.2852	.2293	.1369	.0660	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002
	3	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0710	.0323	.0123	.0040	.0011
	4	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046
	5	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148
	6	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370
	7	.0000	.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739
	8	.0000	.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201
	9	.0000	.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602
	10	.0000	.0000	.0002	.0020	.0009	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.1602
	12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0150	.0370
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0049	.0148
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0046
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

جدول رقم (6)

توزيع بواسون

$$P(x) = \frac{\lambda^x C^{-\lambda}}{x!} ; x = 0,1,2,...., \mu = \lambda$$

x	λ = .1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3650	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.001	.0002

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0001	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0005	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	..2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	..1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

تابع جدول رقم (6)

x	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0918	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1571	.1517	.1460	.1401
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.1081
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

x	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	0.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0186	.0519	.0552	.0580	.0620	.0654	.0688
10	.0222	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	0.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0110	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0304	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1102	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1484	.1454	.1420	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1456	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0245	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0264
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

تابع جدول رقم (6)

x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0025	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0642	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1382	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0178	.0501	.0531	.0558	.0585	.0618	.0610	.0667	.0695	.0722
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0388	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0181	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0086	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	.0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0115	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0086	.0079	.0071	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0269	.0252	.0237	.0222	.0208	.0195	.0183	.0171	.0100	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0413	.0402	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0752	.0722	.0692	.0663	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1358	.1338	.1317	.1291	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171
8	.1395	.1392	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	.1256	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1318
10	.1017	.1040	.1063	.1084	.1104	.1123	.1140	.1157	.1172	.1186
11	.0749	.0770	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0505	.0530	.0555	.0579	.0579	.0029	.0654	.0679	.0703	.0728
13	.0315	.0334	.0354	.0374	.0374	.0116	.0438	.0459	.0481	.0504
14	.0182	.0196	.0210	.0225	.0225	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0098	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0050	.0055	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0010	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0011	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0001	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0016	.0013	.0010	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0430	.0118	.0318	.0378
6	.0881	.0851	.0822	.0793	.0764	.0736	.0700	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0082	.0955	.0928	.0901
8	.1302	.1286	.1269	.1251	.1232	.1212	.1191	.1170	.1148	.1125
9	.1317	.1315	.1311	.1306	.1300	.1293	.1284	.1274	.1263	.1251

تابع جدول رقم (6)

x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
10	.11198	.1210	.1219	.1228	.1235	.1241	.1245	.1219	.1250	.1251
11	.0091	.1012	.1031	.1019	.1067	.1083	.1098	.1112	.1425	.1137
12	.0752	.0776	.0799	.0822	.0844	.0866	.0888	.0008	.0928	.0948
13	.0526	.0549	.0572	.0504	.0617	.0640	.0002	.0005	.0707	.0729
14	.0342	.0361	.0380	.0300	.0419	.0439	.0459	.0179	.0500	.0521
15	.0208	.0221	.0235	.0200	.0265	.0281	.0297	.0313	.0330	.0347
16	.0118	.0127	.0137	.0117	.0157	.0168	.0180	.0192	.0201	.0217
17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0088	.0095	.0103	.0111	.0119	.0128
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0051	.0055	.0000	.0065	.0071
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0026	.0028	.0031	.0034	.0037
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	.0001	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0111	.0255	.0152	.0087	.0018	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0137	.0281	.0174	.0104	.0060	.0043	.0018	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0301	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0186	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0814	.0663	.0196	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0058	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0514	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1084	.0092	.0006	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0092	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0034	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0256	.0397	.0554	.0706	.0830	.0009	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0016	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0092	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0530	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0500	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

جدول رقم (7)

القيم الجدولية لاختبار كروسكال - ويلز

القيم الحرجة

Sample sizes			H	ρ
n_1	n_2	n_3		
2	1	1	2.7000	.500
2	2	1	3.0000	.200
2	2	2	4.5714	.067
			3.7143	.200
3	1	1	3.2000	.300
3	2	1	4.2857	.100
			3.8571	.133
3	2	2	5.3572	.029
			4.7143	.048
			4.5000	.067
			4.4643	.105
3	3	1	5.1429	.043
			4.5714	.100
			4.0000	.129
3	3	2	6.2500	.011
			5.3611	.032
			5.1389	.061
			4.5556	.100
			4.2500	.121
3	3	3	7.2000	.004
			6.4889	.011
			5.6889	.029
			5.6000	.050
			5.0667	.086
			4.6222	.100
4	1	1	3.5714	.200
4	2	1	4.8214	.057
			4.5000	.076
			4.0179	.114
4	2	2	6.0000	.014
			5.3333	.033
			5.1250	.052
			4.4583	.100
			4.1667	.105
4	3	1	5.8333	.021
			5.2083	.050
			5.0000	.057
			4.0556	.093
			3.8889	.129
4	3	2	6.4444	.008
			6.3000	.011
			5.4444	.046
			5.4000	.051
			4.5111	.068
			4.4444	.102
4	3	3	6.7455	.010
			6.7091	.013
			5.7909	.046
			5.7273	.050
			4.7091	.092
			4.7000	.101
4	4	1	6.6667	.010
			6.1667	.022
			4.9667	.048
			4.8667	.054
			4.1667	.082
			4.0667	.102
4	4	2	7.3064	.006
			6.8727	.011
			5.4545	.016
			5.2364	.052
			4.5545	.098
			4.4455	.103
4	4	3	7.1439	.010
			7.1364	.011
			5.5985	.049
			5.6758	.051
			4.5455	.099
			4.4773	.102
4	4	4	7.6538	.008
			7.5385	.011
			5.6923	.049
			5.6538	.054
			4.6539	.097
			4.5001	.104
5	1	1	3.8571	.134
5	2	1	5.2500	.036
			5.0000	.048
			4.4500	.071
			4.2000	.095
			4.0500	.119

تابع جدول رقم (7)

Sample sizes			H	p
n_1	n_2	n_3		
5	2	2	6.5333	.008
			6.1333	.013
			5.1600	.034
			5.0400	.056
			4.3733	.090
			4.2933	.122
5	3	1	6.4000	.012
			4.9600	.048
			4.8711	.052
			4.0178	.095
			3.8400	.123
5	3	2	6.9091	.009
			6.8218	.010
			5.2509	.049
			5.1055	.052
			4.6509	.091
			4.4945	.101
5	3	3	7.0788	.009
			6.9818	.011
			5.6485	.049
			5.5152	..051
			4.5333	.097
			4.4121	.109
5	4	1	6.9545	.008
			6.8400	.011
			4.9855	..44
			4.8600	.056
			3.9873	.098
			3.9600	.102
5	4	2	7.2045	.009
			7.1182	.010
			5.2727	.049
			5.2682	.050
			4.5409	.098
			4.5182	.101
5	4	3	7.4449	.010
			7.3949	.011
			5.6564	.049

Sample sizes			H	p
n_1	n_2	n_3		
			5.6308	.050
			4.5487	.099
			4.5231	.103
5	4	4	7.7604	.009
			7.7440	.011
			5.6571	.049
			5.6176	.050
			4.6187	.100
			4.5527	.102
5	5	1	7.3091	.009
			6.8364	.011
			5.1273	.046
			4.9091	.035
			4.1091	.086
			4.0364	.105
5	5	2	7.3385	.010
			7.2692	.010
			5.3385	.047
			5.2462	.051
			4.6231	.097
			4.5077	.100
5	5	3	7.5780	.010
			7.5429	.010
			5.7055	.046
			5.6264	.051
			4.5451	.100
			4.5363	.102
5	5	4	7.8229	.010
			7.7914	.010
			5.6657	.049
			5.6429	.050
			4.5229	.099
			4.5200	.101
			8.0000	.009
5	5	5	7.9800	.010
			5.7800	.049
			5.6600	.051
			4.5600	.100
			4.5000	.102

جدول رقم (8)

قيم معامل سبيرمان لارتباط الرتب

CRITICAL VALUES OF SPEARMAN'S RANK CORRELATION COEFFICIENT (R)

$$R = \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

Q% \ n	4	5	6	7	8	9	10
10	—	0·900	0·771	0·679	0·643	0·582	0·549
5	—	—	0·829	0·750	0·738	0·666	0·632

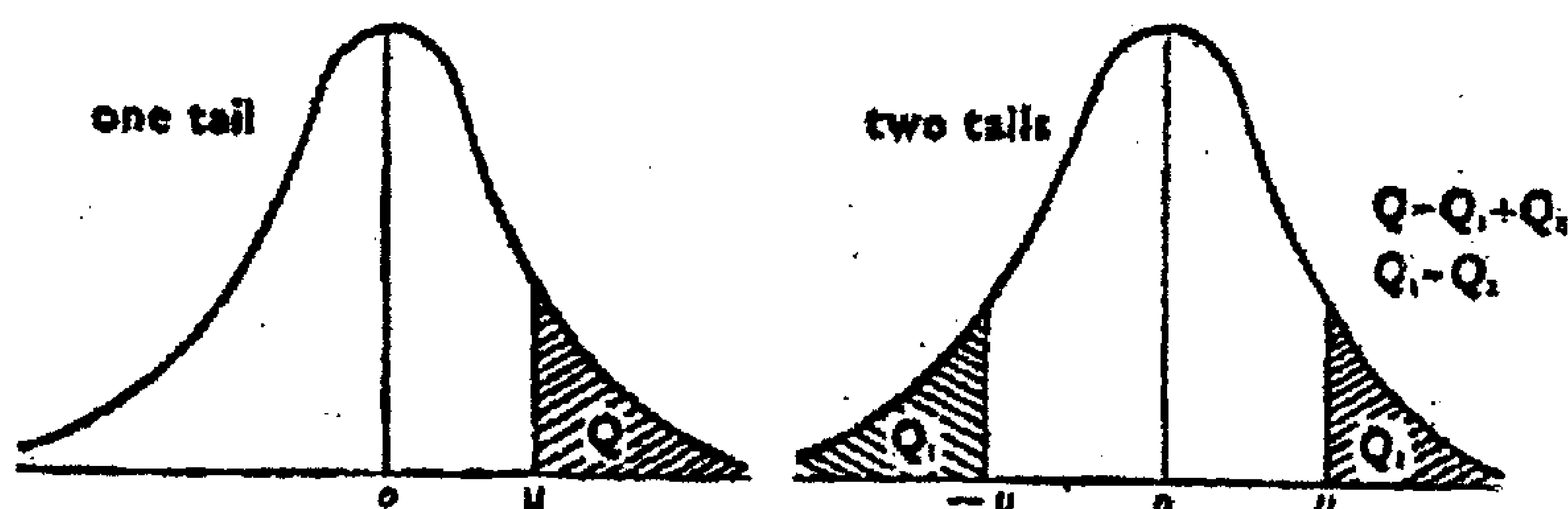
For $10 < n \leq 20$, $\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\sqrt{n-2}$ is distributed like t with $(n-2)$ d.f.

For $n > 20$, $R\sqrt{n-1}$ may be treated as normally distributed (0, 1).

جدول رقم (9)

المنحنى الطبيعي المعياري

PERCENTAGE POINTS OF THE STANDARD NORMAL CURVE



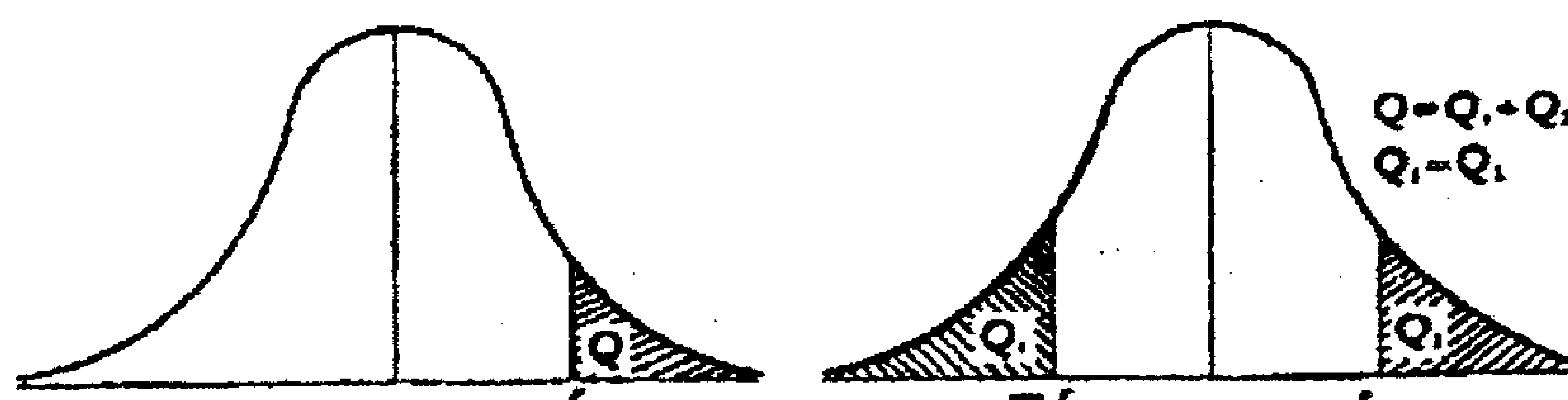
	Q%					
One Tail	5	2·5	1	0·5	0·1	0·05
Two Tails	10	5	2	1	0·2	0·1
	1·64	1·96	2·33	2·58	3·09	3·29

جدول رقم (10)

معامل الارتباط (ρ = 0)

PERCENTAGE POINTS OF THE CORRELATION COEFFICIENT

when ρ = 0



	Q%					
One Tail	5	2·5	1	0·5	0·1	0·05
Two Tail	10	5	2	1	0·2	0·1
ν						
2	·900	·950	·980	·990	·998	·999
3	·805	·878	·934	·959	·986	·991
4	·729	·811	·882	·917	·963	·974
5	·669	·754	·833	·875	·935	·951
6	·621	·707	·789	·834	·905	·925
7	·582	·666	·750	·798	·875	·898
8	·549	·632	·715	·765	·847	·872
9	·521	·602	·685	·735	·820	·847
10	·497	·576	·658	·708	·795	·823
11	·476	·553	·634	·684	·772	·801
12	·457	·532	·612	·661	·750	·780
13	·441	·514	·592	·641	·730	·760
14	·426	·497	·574	·623	·711	·742
15	·412	·482	·558	·606	·694	·725
16	·400	·468	·543	·590	·678	·708
17	·389	·456	·529	·575	·662	·693
18	·378	·444	·516	·561	·648	·679
19	·369	·433	·503	·549	·635	·665
20	·360	·423	·492	·537	·622	·652
25	·323	·381	·445	·487	·568	·597
30	·296	·349	·409	·449	·526	·554
40	·257	·304	·358	·393	·463	·490
60	·211	·250	·295	·325	·385	·408

جدول رقم (11)

القيم الحرجة العليا والدنيا لاختبار ديربن ـ واتسون

Critical Values for the Durbin-Watson Test: 5% Significance Level[a]

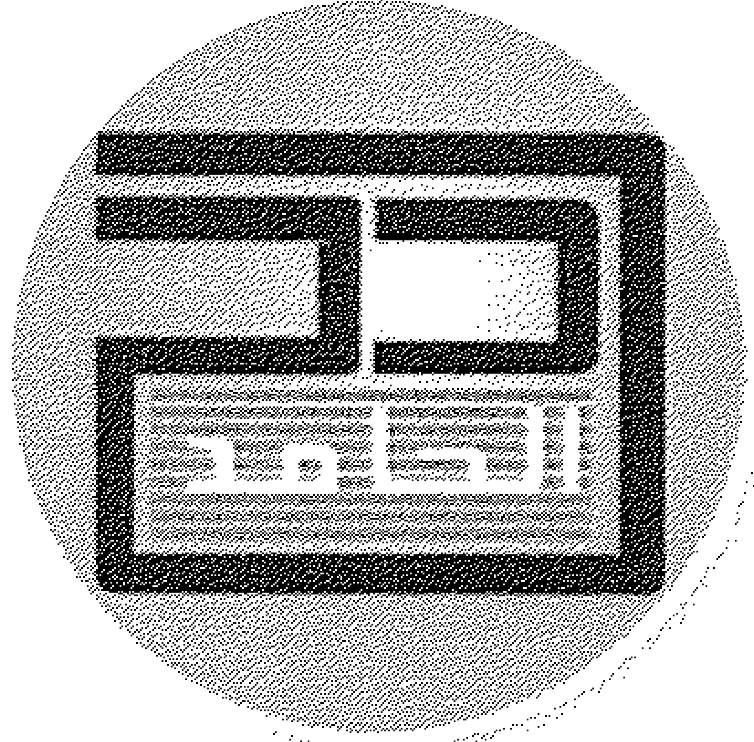
	K = 2		K = 3		K = 4		K = 5		K = 6		K = 7		K = 8		K = 9		K = 10		K = 11	
T	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0.610	1.400																		
7	0.700	1.356	0.467	1.896																
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.368	2.287														
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588												
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822										
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.316	2.645	0.203	3.005								
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.379	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149						
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.445	2.390	0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266				
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360		
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.472	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.257	0.502	2.461	0.407	2.667	0.321	2.873	0.244	3.073
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.692	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.732	2.124	0.637	2.290	0.547	2.460	0.461	2.633	0.380	2.806
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.734
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.751	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.012	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.958	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.650	2.431
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.682	2.396
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.795	2.281
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.080	1.891	1.015	1.979	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.877	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.198
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.945	2.149
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.372	1.808	1.335	1.850	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.404	1.805	1.370	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.433	1.802	1.401	1.837	1.369	1.873	1.337	1.910	1.305	1.948
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770	1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.480	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774	1.500	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780	1.550	1.803	1.528	1.826	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898
150	1.720	1.746	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.847	1.608	1.862	1.594	1.877
200	1.758	1.778	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.810	1.718	1.820	1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874

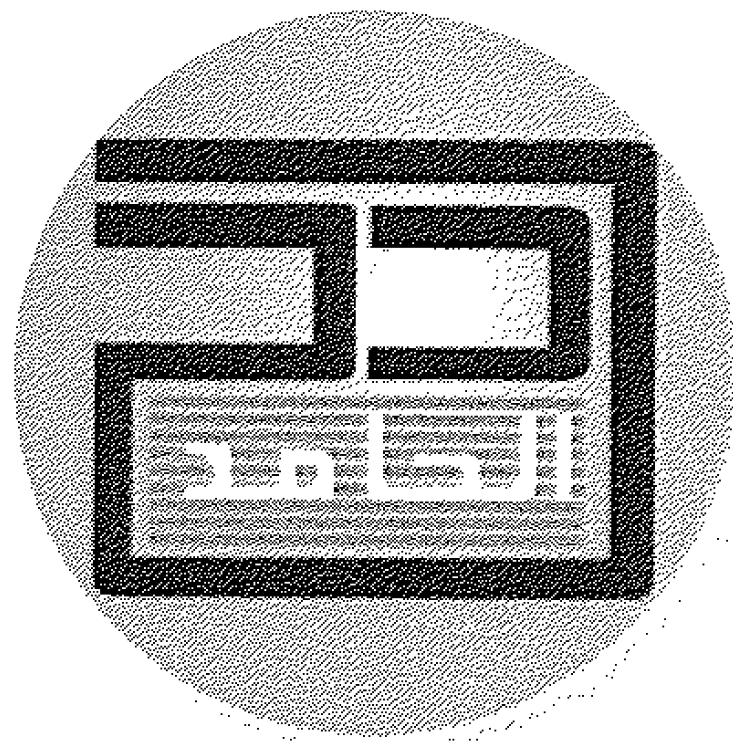
[a] K refers to the number of columns in X, including the constant term.

تابع جدول رقم (11)

T	K = 12 d_L	K = 12 d_U	K = 13 d_L	K = 13 d_U	K = 14 d_L	K = 14 d_U	K = 15 d_L	K = 15 d_U	K = 16 d_L	K = 16 d_U	K = 17 d_L	K = 17 d_U	K = 18 d_L	K = 18 d_U	K = 19 d_L	K = 19 d_U	K = 20 d_L	K = 20 d_U	K = 21 d_L	K = 21 d_U
16	0.098	3.503																		
17	0.138	3.378	0.087	3.557																
18	0.177	3.265	0.123	3.441	0.078	3.603														
19	0.220	3.159	0.160	3.335	0.111	3.496	0.070	3.642												
20	0.263	3.063	0.200	3.234	0.145	3.395	0.100	3.542	0.063	3.676										
21	0.307	2.976	0.240	3.141	0.182	3.300	0.132	3.448	0.091	3.583	0.058	3.705								
22	0.349	2.897	0.281	3.057	0.220	3.211	0.166	3.358	0.120	3.495	0.083	3.619	0.052	3.731						
23	0.391	2.826	0.322	2.979	0.259	3.128	0.202	3.272	0.153	3.409	0.110	3.535	0.076	3.650	0.048	3.753				
24	0.431	2.761	0.362	2.908	0.297	3.053	0.239	3.193	0.186	3.327	0.141	3.454	0.101	3.572	0.070	3.678	0.044	3.773		
25	0.470	2.702	0.400	2.844	0.335	2.983	0.275	3.119	0.221	3.251	0.172	3.376	0.130	3.494	0.094	3.604	0.065	3.702	0.041	3.790
26	0.508	2.649	0.436	2.784	0.373	2.919	0.312	3.051	0.256	3.179	0.205	3.303	0.160	3.420	0.120	3.531	0.087	3.632	0.060	3.724
27	0.544	2.600	0.475	2.730	0.409	2.859	0.348	2.987	0.291	3.112	0.238	3.233	0.191	3.349	0.149	3.460	0.112	3.563	0.081	3.658
28	0.578	2.555	0.510	2.680	0.445	2.805	0.383	2.928	0.325	3.050	0.271	3.168	0.222	3.283	0.178	3.392	0.138	3.495	0.104	3.592
29	0.612	2.515	0.544	2.634	0.479	2.755	0.418	2.874	0.359	2.992	0.305	3.107	0.254	3.219	0.208	3.327	0.166	3.431	0.129	3.528
30	0.643	2.477	0.577	2.592	0.512	2.708	0.451	2.823	0.392	2.937	0.337	3.050	0.286	3.160	0.238	3.266	0.195	3.368	0.156	3.465
31	0.674	2.443	0.608	2.553	0.545	2.665	0.484	2.776	0.425	2.887	0.370	2.996	0.317	3.103	0.269	3.208	0.224	3.309	0.183	3.406
35	0.783	2.330	0.722	2.425	0.662	2.521	0.604	2.619	0.547	2.716	0.492	2.813	0.439	2.910	0.388	3.005	0.340	3.099	0.295	3.190
36	0.808	2.306	0.744	2.398	0.689	2.492	0.631	2.584	0.575	2.680	0.520	2.774	0.467	2.868	0.417	2.961	0.369	3.053	0.323	3.142
37	0.831	2.285	0.772	2.374	0.714	2.464	0.657	2.555	0.602	2.646	0.548	2.738	0.495	2.829	0.445	2.920	0.397	3.009	0.351	3.097
38	0.854	2.265	0.796	2.351	0.739	2.438	0.683	2.526	0.628	2.614	0.575	2.703	0.522	2.792	0.472	2.880	0.424	2.968	0.378	3.054
39	0.875	2.246	0.819	2.329	0.763	2.413	0.707	2.499	0.653	2.585	0.600	2.671	0.549	2.757	0.499	2.843	0.451	2.929	0.404	3.013
40	0.896	2.228	0.840	2.309	0.785	2.391	0.731	2.473	0.678	2.557	0.626	2.641	0.575	2.724	0.525	2.808	0.477	2.892	0.430	2.974
45	0.988	2.156	0.938	2.225	0.887	2.296	0.838	2.367	0.788	2.439	0.740	2.512	0.692	2.586	0.644	2.659	0.598	2.733	0.553	2.807
50	1.064	2.103	1.019	2.163	0.973	2.225	0.927	2.287	0.882	2.350	0.836	2.414	0.792	2.479	0.747	2.544	0.703	2.610	0.660	2.675
55	1.129	2.062	1.087	2.116	1.045	2.170	1.003	2.225	0.961	2.281	0.919	2.338	0.877	2.396	0.836	2.454	0.795	2.512	0.754	2.571
60	1.184	2.031	1.145	2.079	1.106	2.127	1.068	2.177	1.029	2.227	0.990	2.278	0.951	2.330	0.913	2.382	0.874	2.434	0.836	2.487
65	1.231	2.006	1.195	2.049	1.160	2.093	1.124	2.138	1.088	2.183	1.052	2.229	1.016	2.276	0.980	2.323	0.944	2.371	0.908	2.419
70	1.272	1.986	1.239	2.026	1.206	2.066	1.172	2.106	1.139	2.148	1.105	2.189	1.072	2.232	1.038	2.275	1.005	2.318	0.971	2.362
75	1.308	1.970	1.277	2.006	1.247	2.043	1.215	2.080	1.184	2.118	1.153	2.156	1.121	2.195	1.090	2.235	1.058	2.275	1.027	2.315
80	1.340	1.957	1.311	1.991	1.283	2.024	1.253	2.059	1.224	2.093	1.195	2.129	1.165	2.165	1.136	2.201	1.106	2.238	1.076	2.275
85	1.369	1.946	1.342	1.977	1.315	2.009	1.287	2.040	1.260	2.073	1.232	2.105	1.205	2.139	1.177	2.172	1.149	2.206	1.121	2.241
90	1.395	1.937	1.369	1.964	1.344	1.995	1.318	2.025	1.292	2.055	1.266	2.085	1.240	2.116	1.213	2.148	1.187	2.179	1.160	2.211
95	1.418	1.929	1.394	1.954	1.370	1.984	1.345	2.012	1.321	2.040	1.296	2.068	1.271	2.097	1.247	2.126	1.222	2.156	1.197	2.186
100	1.439	1.923	1.416	1.948	1.393	1.974	1.371	2.000	1.347	2.026	1.324	2.053	1.301	2.080	1.277	2.108	1.253	2.135	1.229	2.164
150	1.579	1.892	1.564	1.904	1.550	1.924	1.535	1.940	1.519	1.956	1.504	1.972	1.489	1.989	1.474	2.006	1.458	2.023	1.443	2.040
200	1.654	1.885	1.643	1.896	1.632	1.908	1.621	1.919	1.610	1.931	1.599	1.943	1.588	1.955	1.576	1.967	1.565	1.979	1.554	1.991

Source: This table is reproduced from N. E. Savin, and K. J. White, The Durbin-Watson Test for Serial Correlation with Extreme Sample Sizes or Many Regressors. *Econometrica*, 45; 1989–1996, 1977. With permission from The Econometric Society.





اختبار الفرضيات الاحصائية







دار الحامد للنشر والتوزيع

الأردن - عمان - ص.ب.: 366 عمان 11941 الأردن

هاتف: 5231081 فاكس: 009626-5235594

E-mail: dar_alhamed@hotmail.com

daralhamed@yahoo.com

www.daralhamed.net